No.051

题目

在 $\triangle ABC$ 中，$a=\sqrt{11}, b-c=\sqrt{7}$，且 $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{5}$，求 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$。

解析

因为 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\sqrt{5}$，所以有：

$$\sin A=\frac{2\sqrt{5}}{bc}$$

又因为有：

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{(b-c)^2-a^2+2bc}{2bc}=\frac{bc-2}{bc}$$

且 $\sin^2 A+\cos^2 A=1$，故有：

$$\left(\frac{2\sqrt{5}}{bc}\right)^2+\left(\frac{bc-2}{bc}\right)^2=1$$

可以解得 $bc=6$，故有 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=bc\cos A=4$。

by CXY。

No.052

题目

有一个 3×3 的网格，有一个人最开始位于左下角，他要向右上角走去。他每次走一步都会从上、下、左、右、左上、左下、右下七个方向中等概率的随机选择一个方向走（如果这个方向没有格子，那么他一定不会选择这个方向，例如在左上角他只会从右、下、右下三个方向中随机选择一个方向），且到达右上角后就停止不再走动，求他期望走多少步可以走到右上角。

解析

设九个格子走到右上角的期望步数分别为 $a_{1,1},a_{1,2},a_{1,3},a_{2,1},a_{2,2},a_{2,3},a_{3,1},a_{3,2},a_{3,3}$，其中 $a_{1,1}$ 代表左下角，$a_{3,3}$ 代表右上角，则有：

$$
\begin{cases}
a_{1,1}=1+\dfrac{a_{1,2}+a_{2,1}}{2}\\
a_{1,2}=1+\dfrac{a_{1,1}+a_{1,3}+a_{2,1}+a_{2,2}}{4}\\
a_{1,3}=1+\dfrac{a_{1,2}+a_{2,2}+a_{2,3}}{3}\\
a_{2,1}=1+\dfrac{a_{1,1}+a_{1,2}+a_{2,2}+a_{3,1}}{4}\\
a_{2,2}=1+\dfrac{a_{1,1}+a_{1,2}+a_{1,3}+a_{2,1}+a_{2,3}+a_{3,1}+a_{3,2}}{7}\\
a_{2,3}=1+\dfrac{a_{1,2}+a_{1,3}+a_{2,2}+a_{3,2}+a_{3,3}}{5}\\
a_{3,1}=1+\dfrac{a_{2,1}+a_{2,2}+a_{3,2}}{3}\\
a_{3,2}=1+\dfrac{a_{2,1}+a_{2,2}+a_{2,3}+a_{3,1}+a_{3,3}}{5}\\
a_{3,3}=0
\end{cases}
$$

可以解得 $a_{1,1}=\dfrac{633}{17}$，且 $a_{1,2}=a_{2,1}=\dfrac{616}{17},a_{1,3}=a_{3,1}=\dfrac{569}{17},a_{2,2}=34,a_{2,3}=a_{3,2}=\dfrac{462}{17}$。

by CXY。

No.053

题目

求 $\sin\left(x^2+x+1\right)+\cos\left(x-1\right)=0$ 的解集。

解析

由和差化积可得：

$$
\sin\left(x^2+x+1\right)+\cos\left(x-1\right)=2\sin\left(\frac{x^2}{2}+1+\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{x^2}{2}+x+\frac{\pi}{4}\right)
$$

故当 $\sin\left(\dfrac{x^2}{2}+1+\dfrac{\pi}{4}\right)=0$ 或 $\sin\left(\dfrac{x^2}{2}+x+\dfrac{\pi}{4}\right)=0$ 时的 x 为原方程的解。

故有 $\dfrac{x^2}{2}+1+\dfrac{\pi}{4}=k\pi$ 或 $\dfrac{x^2}{2}+x+\dfrac{\pi}{4}=k\pi$，故可以解得：

$$
x\in\left\{x\mid x=\pm\sqrt{\frac{(4k-1)\pi-4}{2}},k\in\mathbb{Z}\right\}
$$

或：

$$
x\in\left\{x\mid x=-1\pm\sqrt{\frac{(4k-1)\pi+2}{2}},k\in\mathbb{Z}\right\}
$$

综上，原方程解集为：

$$\left\{x \mid x=\pm\sqrt{\frac{(4k-1)\pi-4}{2}}, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{x \mid x=-1\pm\sqrt{\frac{(4k-1)\pi+2}{2}}, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

by CXY。

No.054

题目

在 $\triangle ABC$ 中，O 为 $\triangle ABC$ 的外心，且 $5\overrightarrow{OA}+6\overrightarrow{OB}+7\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$，求 $\cos A$。

解析

因为有 $5\overrightarrow{OA}+6\overrightarrow{OB}+7\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$，故 $6\overrightarrow{OB}+7\overrightarrow{OC}=-5\overrightarrow{OA}$，则有：

$$\left(6\overrightarrow{OB}+7\overrightarrow{OC}\right)^2=\left(-5\overrightarrow{OA}\right)^2$$

即：

$$36\overrightarrow{OB}^2+49\overrightarrow{OC}^2+84\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=25\overrightarrow{OA}^2$$

由于 $\overrightarrow{OA}^2=\overrightarrow{OB}^2=\overrightarrow{OC}^2=k$ 且 $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\left|\overrightarrow{OB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{OC}\right|\cos\angle BOC=k\cos\angle BOC$ 且 $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=-\frac{5}{6}\overrightarrow{OA}^2$，故有 $\cos\angle BOC=-\frac{5}{7}$，故有：

$$\cos A=\cos\frac{\angle BOC}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\angle BOC}{2}}=\frac{\sqrt{7}}{7}$$

by CXY。

No.055

题目

求函数 $f(x)=\sqrt{3+3\cos x}+\sqrt{1-\cos x}$ 的最大值和最小值。

解析

注意到 $f(x)$ 的最大值和最小值其实就为 $g(x)=\sqrt{3+3x}+\sqrt{1-x}$ 的最大值和最小值。

而由柯西不等式，$g(x)$最大值为：

$$\sqrt{3+3x}+\sqrt{1-x}\le 2\sqrt{\left(\frac{\left(\sqrt{1+x}\right)^2+\left(\sqrt{1-x}\right)^2}{2}\right)\left(\frac{\left(\sqrt{3}\right)^2+1^2}{2}\right)}=2\sqrt{2}$$

设 $g(x)$ 最小值为 m，则 $\sqrt{3+3x}+\sqrt{1-x}\geq m$，则 $4+2x+2\sqrt{3-3x^2}\geq m^2$，移向平方可得当 $m^2-4-2x\geq 0$ 时有 $12-12x^2\geq 4x^2+\left(16-4m^2\right)x+\left(m^4-8m^2+16\right)$，则有：

$$h(x)=16x^2+\left(16-4m^2\right)x+\left(m^4-8m^2+4\right)\leq 0$$

对于 $\forall x\in\left[-1,\dfrac{m^2-4}{2}\right]$ 成立。由二次函数性质可知该条件等价于
$h(-1)\leq 0,h\left(\dfrac{m^2-4}{2}\right)\leq 0$，则有：

$$m^4-4m^2+4\leq 0$$

以及：

$$3m^4-24m^2+36\leq 0$$

故可以解得 $m=\pm\sqrt{2}$，舍负后即得 $m=\sqrt{2}$。

故 $f(x)$ 最大值和最小值分别为 $2\sqrt{2},\sqrt{2}$。

by HAR。

No.056

题目

若 $\tan\theta=\dfrac{3}{7}$，求下式的值：

$$\frac{\cos^3\theta+\sin\theta}{\cos\theta-\sin\theta}-\frac{2}{\cos^4\theta-1}$$

解析

$$\begin{aligned}\frac{\cos^3\theta+\sin\theta}{\cos\theta-\sin\theta}-\frac{2}{\cos^4\theta-1}&=\frac{\cos^3\theta+\sin\theta\cos^2\theta+\sin^3\theta}{\cos^3\theta-\sin\theta\cos^2\theta+\sin^2\theta\cos\theta-\sin^3\theta}-\frac{2\cos^4\theta+4\sin^2\theta\cos^2\theta+}{-2\sin^2\theta\cos^2\theta-\sin}\\&=\frac{1+\tan\theta+\tan^3\theta}{1-\tan\theta+\tan^2\theta-\tan^3\theta}+\frac{2+4\tan^2\theta+2\tan^4\theta}{2\tan^2\theta+\tan^4\theta}\\&=\frac{1+\frac{3}{7}+\left(\frac{3}{7}\right)^3}{1-\frac{3}{7}+\left(\frac{3}{7}\right)^2-\left(\frac{3}{7}\right)^3}+\frac{2+4\left(\frac{3}{7}\right)^2+2\left(\frac{3}{7}\right)^4}{2\left(\frac{3}{7}\right)^2+\left(\frac{3}{7}\right)^4}\\&=\frac{2058767}{223416}\end{aligned}$$

by CXY。

No.057

题目

已知 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{2},|\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}$，且满足 $|\lambda\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|=2|2\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}|$（$\lambda\in\mathbb{R}_+$），求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 的最大值。

解析

由于 $|\lambda\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|=2|2\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}|$，故有 $|\lambda\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|^2=4|2\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}|^2$，即:

$$\lambda^2\boldsymbol{a}^2-4\lambda\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{b}^2=16\boldsymbol{a}^2+16\lambda\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+4\lambda^2\boldsymbol{b}^2$$

故有 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-\dfrac{\lambda^2+2}{2\lambda}\leq-2\sqrt{\dfrac{1}{2}}=-\sqrt{2}$。

by CXY。

No.058

题目

> 对于集合 X 和函数 $f:X\to X$，定义 f 的 n 次迭代 $f^{[n]}$ 为:
>
> - 若 $n=1$，则 $f^{[1]}=f$。
> - 若 $n>1$，则 $f^{[n]}=f\circ f^{[n-1]}$。
>
> 其中 $f\circ g$ 表示函数复合，即 $(f\circ g)(x)=f(g(x))$。

若 $f(x)=\dfrac{2x}{3x+5}$，求 $f^{[n]}(x)$。

解析

不妨设 $g(x)=\dfrac{x}{a+bx}$，考虑 $g^{[n]}(x)$ 的形式。

注意到 $g^{[2]}(x)=\dfrac{x}{a^2+bx(1+a)}$ 且 $g^{[3]}(x)=\dfrac{x}{a^3+bx\left(1+a+a^2\right)}$，不难发现有 $g^{[n]}(x)=\dfrac{x}{a^n+bx\cdot\dfrac{a^n-1}{a-1}}$，由数学归纳法易证。

故取 $a=\dfrac{5}{2},b=\dfrac{3}{2}$，此时即有 $g(x)=\dfrac{2x}{5+3x}=f(x)$。

故有 $f^{[n]}(x)=\dfrac{x}{\left(\dfrac{5}{2}\right)^n(x+1)-x}$。

by CXY。

No.059

题目

$\triangle ABC$ 中，H 为垂心，且 $4\overrightarrow{HA}+5\overrightarrow{HB}+7\overrightarrow{HC}=\mathbf{0}$，求 $\sin A$ 的值。

解析

由于 H 为垂心，故有 $\tan A\cdot\overrightarrow{HA}+\tan B\cdot\overrightarrow{HB}+\tan C\cdot\overrightarrow{HC}=\mathbf{0}$。

故有 $\dfrac{\tan A}{\tan B}=\dfrac{4}{5},\dfrac{\tan B}{\tan C}=\dfrac{5}{7}$。

而又由于 $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$，故可以解得 $\tan^2 A=\dfrac{64}{35}$。

故 $\dfrac{\sin^2 A}{1-\sin^2 A}=\dfrac{64}{35}$，即 $\sin^2 A=\dfrac{64}{99}$，即 $\sin A=\dfrac{8\sqrt{11}}{33}$。

by CXY。

No.060

题目

求函数 $f(x)=\ln\left(\sin x+\cos x+\sin x\cos x\right)$ 的定义域和值域。

解析

令 $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=t$，则 $\sin x+\cos x+\sin x\cos x=t+\dfrac{t^2-1}{2}$。

由 $t+\dfrac{t^2-1}{2}=0$，故可以解得 $t=-1+\sqrt{2}$（舍另一根），故 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的定义域即为 $\left(\arcsin\left(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}-\arcsin\left(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$，故 $f(x)$ 定义域为：

$$\left(2k\pi+\arcsin\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\frac{\pi}{4},2k\pi+\frac{3\pi}{4}-\arcsin\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$$

其中 $k\in\mathbb{Z}$。

由于 $t\in\left(\sqrt{2}-1,\sqrt{2}\right]$，故 $t+\dfrac{t^2-1}{2}\in\left(0,\dfrac{1}{2}+\sqrt{2}\right]$，故原函数值域为：

$$\left(-\infty,\ln\left(\frac{1}{2}+\sqrt{2}\right)\right)$$

by CXY。