

No.041

考虑建立 $\frac{5-x}{5-2x}$ 与 x^2 之间的联系, 由待定系数法不难发现 $\frac{5-x}{5-2x} \geq \frac{x^2}{3} + 1$, 则有:

$$\frac{5-x}{5-2x} + \frac{5-y}{5-2y} + \frac{5-z}{5-2z} \geq \frac{x^2+y^2+z^2}{3} + 3 = \frac{10}{3}$$

当 $x=1, y=z=0$ 时取得等号。

故原式最小值为 $\frac{10}{3}$ 。

No.042

设 $CM = \lambda, CN = \mu$, 则有 $\mu = \frac{1}{\lambda^2}$ 。

因为有 $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, 且有:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} &= x\overrightarrow{AM} + y\overrightarrow{AN} \\ &= x\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}\right) + y\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN}\right) \\ &= \left(x + y - \frac{\mu}{2}y\right)\overrightarrow{AB} + \left(x + y - \frac{\lambda}{4}x\right)\overrightarrow{AD}\end{aligned}$$

故有:

$$x + y - \frac{\mu}{2}y = x + y - \frac{\lambda}{4}x = 1$$

可以解得 $x = \frac{\frac{4}{\lambda}}{\frac{4}{\lambda} + \frac{2}{\mu} - 1}, y = \frac{\frac{2}{\mu}}{\frac{4}{\lambda} + \frac{2}{\mu} - 1}$ 。故 $x + y = 1 + \frac{1}{\frac{4}{\lambda} + \frac{2}{\mu} - 1}$ 。

由于 $\frac{4}{\lambda} + \frac{2}{\mu} = \frac{4}{\lambda} + 2\lambda^2 \geq 3\sqrt[3]{\frac{2}{\lambda} \cdot \frac{2}{\lambda} \cdot 2\lambda^2} = 6$, 故 $x + y \leq 1 + \frac{1}{6-1} = \frac{6}{5}$ 。

No.043

以 $e = (1, 0)$ 建系, 则有 $a = (2, a), b = (-3, b)$, 故有 $|a|^2 + |b|^2 = 2^2 + a^2 + (-3)^2 + b^2 = 50$, 即 $a^2 + b^2 = 37$ 。

故有:

$$a \cdot b = -6 + ab \leq -6 + \frac{a^2 + b^2}{2} = \frac{25}{2}$$

故所求最大值为 $\frac{25}{2}$ 。

by CXY.

No.044

设 $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{AC} = \mathbf{c}$ 。

由余弦定理可得 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, $\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$, $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$ 。

易得 $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ 。

对于 $\overrightarrow{AH}$, 其有 $\overrightarrow{AH} = \lambda_1 \left(\frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}| \cos B} + \frac{\mathbf{c}}{|\mathbf{c}| \cos C} \right)$, 以及

$\overrightarrow{BH} = \mu_1 \left(\frac{-\mathbf{b}}{|-\mathbf{b}| \cos A} + \frac{\mathbf{c} - \mathbf{b}}{|\mathbf{c} - \mathbf{b}| \cos C} \right)$, 且由 $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BH}$, 即:

$$\frac{\frac{\lambda_1}{c \cos B}}{1 - \frac{\mu_1}{c \cos A} - \frac{\mu_1}{a \cos C}} = \frac{\frac{\lambda_1}{b \cos C}}{\frac{\mu_1}{a \cos C}} = 1$$

可以解得 $\lambda_1 = \frac{(a^2 - b^2 - c^2)(a^2 + b^2 - c^2)(a^2 - b^2 + c^2)}{2a(a - b - c)(a + b - c)(a - b + c)(a + b + c)}$ 。

故有:

$$\overrightarrow{AH} = \frac{a^4 - b^4 + c^4 - 2a^2c^2}{a^4 + b^4 + c^4 - a^2b^2 - a^2c^2 - b^2c^2} \overrightarrow{AB} + \frac{a^4 + b^4 - c^4 - 2a^2b^2}{a^4 + b^4 + c^4 - a^2b^2 - a^2c^2 - b^2c^2} \overrightarrow{AC}$$

对于 $\overrightarrow{AI}$, 其有 $\overrightarrow{AI} = \lambda_2 \left(\frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} + \frac{\mathbf{c}}{|\mathbf{c}|} \right)$, 以及 $\overrightarrow{BI} = \mu_2 \left(\frac{-\mathbf{b}}{|-\mathbf{b}|} + \frac{\mathbf{c} - \mathbf{b}}{|\mathbf{c} - \mathbf{b}|} \right)$, 且由

$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI}$, 即:

$$\frac{\frac{\lambda_2}{c}}{1 - \frac{\mu_2}{c} - \frac{\mu_2}{a}} = \frac{\frac{\lambda_2}{b}}{\frac{\mu_2}{a}} = 1$$

可以解得 $\lambda_2 = \frac{bc}{a + b + c}$ 。

故有:

$$\overrightarrow{AI} = \frac{b}{a + b + c} \overrightarrow{AB} + \frac{c}{a + b + c} \overrightarrow{AC}$$

对于 $\overrightarrow{AO}$, 其有 $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\mathbf{b} + \frac{1}{2}\mathbf{c} - \lambda_3 \left(\frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}| \cos B} + \frac{\mathbf{c}}{|\mathbf{c}| \cos C} \right)$, 以及

$\overrightarrow{BO} = \frac{1}{2}(-\mathbf{b}) + \frac{1}{2}(\mathbf{c} - \mathbf{b}) - \mu_3 \left(\frac{-\mathbf{b}}{|-\mathbf{b}| \cos A} + \frac{\mathbf{c} - \mathbf{b}}{|\mathbf{c} - \mathbf{b}| \cos C} \right)$, 且由 $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO}$, 即:

$$\frac{\frac{1}{2} - \frac{\lambda_3}{c \cos B}}{\frac{\mu_3}{c \cos A} + \frac{\mu_3}{a \cos C}} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{\lambda_3}{b \cos C}}{\frac{1}{2} - \frac{\mu_3}{a \cos C}} = 1$$

可以解得 $\lambda_3 = \frac{(a^2 - b^2 - c^2)(a^2 + b^2 - c^2)(a^2 - b^2 + c^2)}{4a(a - b - c)(a + b - c)(a - b + c)(a + b + c)}$ 。

故有：

$$\overrightarrow{AO} = \frac{b^2(-a^2 + b^2 - c^2)}{(a - b - c)(a + b - c)(a - b + c)(a + b + c)} \overrightarrow{AB} + \frac{c^2(-a^2 - b^2 + c^2)}{(a - b - c)(a + b - c)(a - b + c)(a + b + c)}$$

综上，有：

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AH} = \frac{a^4 - b^4 + c^4 - 2a^2c^2}{a^4 + b^4 + c^4 - a^2b^2 - a^2c^2 - b^2c^2} \overrightarrow{AB} + \frac{a^4 + b^4 - c^4 - 2a^2b^2}{a^4 + b^4 + c^4 - a^2b^2 - a^2c^2 - b^2c^2} \overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AI} = \frac{b}{a + b + c} \overrightarrow{AB} + \frac{c}{a + b + c} \overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AO} = \frac{b^2(-a^2 + b^2 - c^2)}{(a - b - c)(a + b - c)(a - b + c)(a + b + c)} \overrightarrow{AB} + \frac{c^2(-a^2 - b^2 + c^2)}{(a - b - c)(a + b - c)(a - b + c)(a + b + c)}$$

No.045

设 a_n 为 n 道选择题，每道题 3 个选项，且任意 3 名学生中都有至少一题的答案互不相同，至多有多少同学参加考试。

根据抽屉原理，对于第 n 道题，至少会有 1 个选项使得选择该选项的人数不超过 $\left\lfloor \frac{a_n}{3} \right\rfloor$ 个，也就是说至少有 $a_n - \left\lfloor \frac{a_n}{3} \right\rfloor$ 个人，他们的第 n 题的答案不超过 2 种，此时剩下的 $n - 1$ 道题就必须满足任意 3 名学生中都有至少一题的答案互不相同，所以就有递推式：

$$a_n - \left\lfloor \frac{a_n}{3} \right\rfloor = a_{n-1}$$

即：

$$a_n = \left\lfloor \frac{3}{2} a_{n-1} \right\rfloor$$

因为 $a_1 = 3$ ，由递推即可得到 $a_{15} = 711$ 。

No.046

由题可得：

$$f(f(xf(x) + y^2)) = f(yf(y) + x^2) = xf(x) + y^2$$

所以有 $f(f(x)) = x \ (\forall x > a)$, 其中 $a = \min_{x \in \mathbb{R}_+} xf(x)$ 。

对于 $\forall x > a$, 因为有:

$$f(f(x)f(f(x)) + y^2) = yf(y) + f^2(x)$$

以及:

$$f(f(x)f(f(x)) + y^2) = f(xf(x) + y^2) = yf(y) + x^2$$

故有 $f^2(x) = x^2$, 即 $f(x) = x \ (\forall x > a)$ 。

取适当的 y 满足 $y > a, y^2 > a$, 利用 $f(y) = y, f(xf(x) + y^2) = xf(x) + y^2$ 即可得:

$$xf(x) + y^2 = x^2 + y^2$$

故有 $f(x) = x \ (\forall x \in \mathbb{R}_+)$ 。

No.047

设向量 $\vec{a} = \vec{HA}, \vec{b} = \vec{HB}, \vec{c} = \vec{HC}$, 设 $u = \vec{b} \cdot \vec{c}$ 。

$$\text{则有 } \cos \angle BHC = \frac{\vec{b} \cdot \vec{c}}{|\vec{b}| \cdot |\vec{c}|} = \frac{u}{|\vec{b}| \cdot |\vec{c}|}。$$

因为 H 是 $\triangle ABC$ 的垂心, 所以有 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = u$, 故对题目所给式进行变形有:

$$5\vec{a} \cdot \vec{b} + 7\vec{b}^2 + 11\vec{c} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\text{即有 } \vec{b}^2 = -\frac{16}{7}u, \text{ 则 } |\vec{b}| = \sqrt{-\frac{16}{7}u}, \text{ 同理可得 } |\vec{c}| = \sqrt{-\frac{12}{11}u}。$$

故有:

$$\begin{aligned} \cos \angle BHC &= \frac{u}{|\vec{b}| \cdot |\vec{c}|} \\ &= \frac{u}{\sqrt{-\frac{16}{7}u} \cdot \sqrt{-\frac{12}{11}u}} \\ &= \frac{u}{-\sqrt{\frac{192}{77}u}} \\ &= -\sqrt{\frac{77}{192}} \\ &= -\frac{\sqrt{231}}{24} \end{aligned}$$

No.048

对原式进行变形可得:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AO} = 4\overrightarrow{AB}^2 + 11\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$$

由于 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2$, 故有 $\overrightarrow{AB}^2 = -\frac{22}{7}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, 同理可得 $\overrightarrow{AC}^2 = -\frac{8}{21}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ 。

$$\text{故有 } \frac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AC}|} = \sqrt{\frac{\overrightarrow{AB}^2}{\overrightarrow{AC}^2}} = \sqrt{\frac{33}{4}} = \frac{\sqrt{33}}{2}。$$

No.049

考虑红球先被拿完的概率。将拿球的顺序记为一个颜色序列，则这个序列是随机排列的，那么红球先被拿完的方案即为在该序列中最后一个红球的后面至少还有绿、蓝、白球各一个。最后一个球有 $\frac{5}{22}$ 的概率是绿球，而刨掉所有绿球后最后一个球有 $\frac{6}{17}$ 的概率是蓝球，再刨掉所有蓝球后最后一个球有 $\frac{7}{11}$ 的概率是白球。类似的，可以求出红球后面至少还有绿、蓝、白球各一个的概率即为：

$$\frac{5}{22} \cdot \frac{6}{17} \cdot \frac{7}{11} + \frac{5}{22} \cdot \frac{7}{17} \cdot \frac{6}{10} + \frac{6}{22} \cdot \frac{5}{16} \cdot \frac{7}{11} + \frac{6}{22} \cdot \frac{7}{16} \cdot \frac{5}{9} + \frac{7}{22} \cdot \frac{5}{15} \cdot \frac{6}{10} + \frac{7}{22} \cdot \frac{6}{15} \cdot \frac{5}{9} = \frac{1218}{3366}$$

同理可以求出绿、蓝、白球先被拿完的概率分别为 $\frac{427}{1584}, \frac{7532}{36465}, \frac{56645}{350064}$ 。

No.050

设 O 为该 n 边形的中点，则有：

$$\left| \sum_{i=1}^n \overrightarrow{PA_i} \right| = \left| \sum_{i=1}^n \left(\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OA_i} \right) \right| = \left| n\overrightarrow{PO} \right|$$

由于 P 在该 n 边形的内部，故必然当 P 位于该 n 边形任意一顶点时 PO 取得最大值，该值为 $\frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{n}}$ 。

$$\text{故有 } \left| n\overrightarrow{PO} \right| \leq \frac{n}{2 \sin \frac{\pi}{n}}。$$