No.041

题目

若实数 $x,y,z\geq 0$ 满足 $x^2+y^2+z^2=1$，求下式的最小值：

$$\frac{5-x}{5-2x}+\frac{5-y}{5-2y}+\frac{5-z}{5-2z}$$

解析

考虑建立 $\frac{5-x}{5-2x}$ 与 x^2 之间的联系，由待定系数法不难发现 $\frac{5-x}{5-2x}\geq\frac{x^2}{3}+1$，则有：

$$\frac{5-x}{5-2x}+\frac{5-y}{5-2y}+\frac{5-z}{5-2z}\geq\frac{x^2+y^2+z^2}{3}+3=\frac{10}{3}$$

当 $x=1,y=z=0$ 时取得等号。

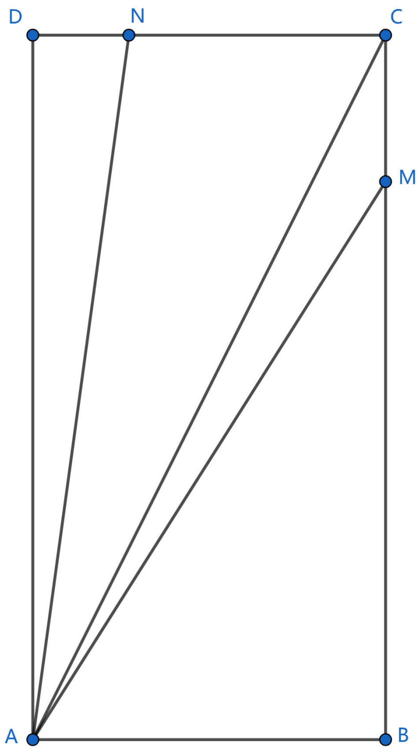
故原式最小值为 $\frac{10}{3}$。

by CXY。

No.042

题目

如图所示，在长方形 $ABCD$ 中，有 $AB=2,AD=4$，M,N 分别为 BC,DC 边上的两点，满足 $CM^2\cdot CN=1$。若有 $\overrightarrow{AC}=x\overrightarrow{AM}+y\overrightarrow{AN}$，求 $x+y$ 的最大值。



解析

设 $CM=\lambda, CN=\mu$，则有 $\mu=\dfrac{1}{\lambda^2}$。

因为有 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$，且有:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC}&=x\overrightarrow{AM}+y\overrightarrow{AN}\\&=x\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}\right)+y\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN}\right)\\&=\left(x+y-\frac{\mu}{2}y\right)\overrightarrow{AB}+\left(x+y-\frac{\lambda}{4}x\right)\overrightarrow{AD}\end{aligned}$$

故有:

$$x+y-\frac{\mu}{2}y=x+y-\frac{\lambda}{4}x=1$$

可以解得 $x=\dfrac{\frac{4}{\lambda}}{\frac{4}{\lambda}+\frac{2}{\mu}-1}, y=\dfrac{\frac{2}{\mu}}{\frac{4}{\lambda}+\frac{2}{\mu}-1}$。故 $x+y=1+\dfrac{1}{\frac{4}{\lambda}+\frac{2}{\mu}-1}$。

由于 $\dfrac{4}{\lambda}+\dfrac{2}{\mu}=\dfrac{4}{\lambda}+2\lambda^2\geq 3\sqrt[3]{\dfrac{2}{\lambda}\cdot\dfrac{2}{\lambda}\cdot 2\lambda^2}=6$，故 $x+y\leq 1+\dfrac{1}{6-1}=\dfrac{6}{5}$。

by CXY。

No.043

题目

平面向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}=2,\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{e}=-3$（其中 $\boldsymbol{e}$ 为单位向量，即 $|\boldsymbol{e}|=1$），且有 $|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2=50$，求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 的最大值。

解析

以 $\boldsymbol{e}=(1,0)$ 建系，则有 $\boldsymbol{a}=(2,a),\boldsymbol{b}=(-3,b)$，故有 $|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2=2^2+a^2+(-3)^2+b^2=50$，即 $a^2+b^2=37$。

故有:

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-6+ab\leq -6+\frac{a^2+b^2}{2}=\frac{25}{2}$$

故所求最大值为 $\dfrac{25}{2}$。

by CXY。

No.044

题目

若 $\triangle ABC$ 三边长分别为 $BC=a,AC=b,BC=c$，G,H,I,O 分别为 $\triangle ABC$ 的重心、垂心、内心、外心。试用 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ 分别表示 $\overrightarrow{AG},\overrightarrow{AH},\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AO}$。

解析

设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b},\overrightarrow{AC}=c$。

由余弦定理可得 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc},\cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca},\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$。

易得 $\overrightarrow{AG}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$。

对于 $\overrightarrow{AH}$，其有 $\overrightarrow{AH}=\lambda_1\left(\dfrac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|\cos B}+\dfrac{\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{c}|\cos C}\right)$，以及 $\overrightarrow{BH}=\mu_1\left(\dfrac{-\boldsymbol{b}}{|-\boldsymbol{b}|\cos A}+\dfrac{\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}|\cos C}\right)$，且由 $\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BH}$，即:

$$\frac{\dfrac{\lambda_1}{c\cos B}}{1-\dfrac{\mu_1}{c\cos A}-\dfrac{\mu_1}{a\cos C}}=\frac{\dfrac{\lambda_1}{b\cos C}}{\dfrac{\mu_1}{a\cos C}}=1$$

可以解得 $\lambda_1=\dfrac{\left(a^2-b^2-c^2\right)\left(a^2+b^2-c^2\right)\left(a^2-b^2+c^2\right)}{2a(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)}$。

故有:

$$\overrightarrow{AH}=\frac{a^4-b^4+c^4-2a^2c^2}{a^4+b^4+c^4-a^2b^2-a^2c^2-b^2c^2}\overrightarrow{AB}+\frac{a^4+b^4-c^4-2a^2b^2}{a^4+b^4+c^4-a^2b^2-a^2c^2-b^2c^2}\overrightarrow{AC}$$

对于 $\overrightarrow{AI}$，其有 $\overrightarrow{AI}=\lambda_2\left(\dfrac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}+\dfrac{\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{c}|}\right)$，以及 $\overrightarrow{BI}=\mu_2\left(\dfrac{-\boldsymbol{b}}{|-\boldsymbol{b}|}+\dfrac{\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}|}\right)$，且由 $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BI}$，即:

$$\frac{\dfrac{\lambda_2}{c}}{1-\dfrac{\mu_2}{c}-\dfrac{\mu_2}{a}}=\frac{\dfrac{\lambda_2}{b}}{\dfrac{\mu_2}{a}}=1$$

可以解得 $\lambda_2=\dfrac{bc}{a+b+c}$。

故有:

$$\overrightarrow{AI}=\frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB}+\frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}$$

对于 $\overrightarrow{AO}$，其有 $\overrightarrow{AO}=\dfrac{1}{2}\boldsymbol{b}+\dfrac{1}{2}\boldsymbol{c}-\lambda_3\left(\dfrac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|\cos B}+\dfrac{\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{c}|\cos C}\right)$，以及 $\overrightarrow{BO}=\dfrac{1}{2}(-\boldsymbol{b})+\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})-\mu_3\left(\dfrac{-\boldsymbol{b}}{|-\boldsymbol{b}|\cos A}+\dfrac{\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}|\cos C}\right)$，且由 $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BO}$，即:

$$\frac{\dfrac{1}{2}-\dfrac{\lambda_3}{c\cos B}}{\dfrac{\mu_3}{c\cos A}+\dfrac{\mu_3}{a\cos C}}=\frac{\dfrac{1}{2}-\dfrac{\lambda_3}{b\cos C}}{\dfrac{1}{2}-\dfrac{\mu_3}{a\cos C}}=1$$

可以解得 $\lambda_3=\dfrac{\left(a^2-b^2-c^2\right)\left(a^2+b^2-c^2\right)\left(a^2-b^2+c^2\right)}{4a(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)}$。

故有:

$$\overrightarrow{AO}=\frac{b^2\left(-a^2+b^2-c^2\right)}{(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)}\overrightarrow{AB}+\frac{c^2\left(-a^2-b^2+c^2\right)}{(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)}$$

综上，有:

$$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AH}=\frac{a^4-b^4+c^4-2a^2c^2}{a^4+b^4+c^4-a^2b^2-a^2c^2-b^2c^2}\overrightarrow{AB}+\frac{a^4+b^4-c^4-2a^2b^2}{a^4+b^4+c^4-a^2b^2-a^2c^2-b^2c^2}\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AI}=\frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB}+\frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AO}=\frac{b^2\left(-a^2+b^2-c^2\right)}{(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)}\overrightarrow{AB}+\frac{c^2\left(-a^2-b^2+c^2\right)}{(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)}$$

by CXY。

No.045

题目

有一些同学参加考试，考试共有 15 道选择题，每道题有 3 个选项，若任意 3 名学生中都有至少一题的答案互不相同，求至多有多少同学参加考试。

解析

设 a_n 为 n 道选择题，每道题 3 个选项，且任意 3 名学生中都有至少一题的答案互不相同时，至多有多少同学参加考试。

根据抽屉原理，对于第 n 道题，至少会有 1 个选项使得选择该选项的人数不超过 $\left\lfloor\frac{a_n}{3}\right\rfloor$ 个，也就是说至少有 $a_n-\left\lfloor\frac{a_n}{3}\right\rfloor$ 个人，他们的第 n 题的答案不超过 2 种，此时剩下的 $n-1$ 道题就必须满足任意 3 名学生中都有至少一题的答案互不相同，所以就有递推式：

$$a_n-\left\lfloor\frac{a_n}{3}\right\rfloor=a_{n-1}$$

即：

$$a_n=\left\lfloor\frac{3}{2}a_{n-1}\right\rfloor$$

因为 $a_1=3$，由递推即可得到 $a_{15}=711$。

by CXY。

No.046

题目

求函数 $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$，使得：

$$f\left(xf(x)+y^2\right)=yf(y)+x^2$$

解析

由题可得：

$$f\left(f\left(xf(x)+y^2\right)\right)=f\left(yf(y)+x^2\right)=xf(x)+y^2$$

所以有 $f(f(x))=x\ \ (\forall x>a)$ ，其中 $a=\min\limits_{x\in\mathbb{R}_+}xf(x)$。

对于 $\forall x>a$，因为有：

$$f\left(f(x)f(f(x))+y^2\right)=yf(y)+f^2(x)$$

以及：

$$f\left(f(x)f(f(x))+y^2\right)=f\left(xf(x)+y^2\right)=yf(y)+x^2$$

故有$f^2(x)=x^2$，即 $f(x)=x$（$\forall x>a$）。

取适当的 y 满足 $y>a,y^2>a$，利用 $f(y)=y,f\left(xf(x)+y^2\right)=xf(x)+y^2$ 即可得：

$$xf(x)+y^2=x^2+y^2$$

故有 $f(x)=x$（$\forall x\in\mathbb{R}_+$）。

by CXY。

No.047

题目

设 H 是 $\triangle ABC$ 的垂心，且 $5\overrightarrow{HA}+7\overrightarrow{HB}+11\overrightarrow{HC}=\mathbf{0}$，求 $\cos\angle BHC$ 的值。

解析

设向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{HA},\boldsymbol{b}=\overrightarrow{HB},\boldsymbol{c}=\overrightarrow{HC}$，设 $u=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$。

则有 $\cos\angle BHC=\dfrac{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{c}|}=\dfrac{u}{|\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{c}|}$。

因为 H 是 $\triangle ABC$ 的垂心，所以有 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=u$，故对题目所给式进行变形有：

$$5\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+7\boldsymbol{b}^2+11\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$$

即有 $\boldsymbol{b}^2=-\dfrac{16}{7}u$，则 $|\boldsymbol{b}|=\sqrt{-\dfrac{16}{7}u}$，同理可得 $|\boldsymbol{c}|=\sqrt{-\dfrac{12}{11}u}$。

故有：

$$
\begin{aligned}
\cos\angle BHC &= \frac{u}{|\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{c}|}\\
&= \frac{u}{\sqrt{-\frac{16}{7}u}\cdot\sqrt{-\frac{12}{11}u}}\\
&= \frac{u}{-\sqrt{\frac{192}{77}}u}\\
&= -\sqrt{\frac{77}{192}}\\
&= -\frac{\sqrt{231}}{24}
\end{aligned}
$$

by CXY。

No.048

题目

已知 O 是 $\triangle ABC$ 的外心，且 $\overrightarrow{AO}=4\overrightarrow{AB}+11\overrightarrow{AC}$，求 $\dfrac{|AB|}{|AC|}$。

解析

对原式进行变形可得：

$$
\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO}=4\overrightarrow{AB}^2+11\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}
$$

由于 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2$，故有 $\overrightarrow{AB}^2=-\dfrac{22}{7}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$，同理可得 $\overrightarrow{AC}^2=-\dfrac{8}{21}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$。

故有 $\dfrac{|AB|}{|AC|}=\sqrt{\dfrac{\overrightarrow{AB}^2}{\overrightarrow{AC}^2}}=\sqrt{\dfrac{33}{4}}=\dfrac{\sqrt{33}}{2}$。

by CXY。

No.049

题目

一个袋子里有 4 个红球、5 个绿球、6 个篮球和 7 个白球，这些球除了颜色外没有区别，现在一个人从袋子里随机拿球，求对于每一个颜色，该颜色先被拿完的概率。

解析

考虑红球先被拿完的概率。将拿球的顺序记为一个颜色序列，则这个序列是随机排列的，那么红球先被拿完的方案即为在该序列中最后一个红球的后面至少还有绿、蓝、白球各一个。最后

一个球有 $\frac{5}{22}$ 的概率是绿球，而刨掉所有绿球后最后一个球有 $\frac{6}{17}$ 的概率是蓝球，再刨掉所有蓝球后最后一个球有 $\frac{7}{11}$ 的概率是白球。类似的，可以求出红球后面至少还有绿、蓝、白球各一个的概率即为：

$$\frac{5}{22}\cdot\frac{6}{17}\cdot\frac{7}{11}+\frac{5}{22}\cdot\frac{7}{17}\cdot\frac{6}{10}+\frac{6}{22}\cdot\frac{5}{16}\cdot\frac{7}{11}+\frac{6}{22}\cdot\frac{7}{16}\cdot\frac{5}{9}+\frac{7}{22}\cdot\frac{5}{15}\cdot\frac{6}{10}+\frac{7}{22}\cdot\frac{6}{15}\cdot\frac{5}{9}=\frac{1218}{3366}$$

同理可以求出绿、蓝、白球先被拿完的概率分别为 $\frac{427}{1584},\frac{7532}{36465},\frac{56645}{350064}$。

by CXY。

No.050

题目

在边长均为 1 的正 n 边形中，n 个顶点分别为 $A_1,A_2,\dots,A_n$，P 为该 n 边形内一点（含边界），求 $\left|\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{PA_i}\right|$ 的最大值。

解析

设 O 为该 n 边形的中点，则有：

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{PA_i}\right|=\left|\sum_{i=1}^{n}\left(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OA_i}\right)\right|=\left|n\overrightarrow{PO}\right|$$

由于 P 在该 n 边形的内部，故必然当 P 位于该 n 边形任意一顶点时 PO 取得最大值，该值为 $\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{n}}$。

故有 $\left|n\overrightarrow{PO}\right|\le\frac{n}{2\sin\frac{\pi}{n}}$。

by CXY。