No.031

令 $u=\dfrac{x-1}{x+1}, \dfrac{u-1}{u+1}=-\dfrac{1}{x}$，代入原式，则有：

$$f\left(\frac{x-1}{x+1}\right)+2f\left(-\frac{1}{x}\right)=\frac{x-1}{x+1}$$

令 $u=-\dfrac{1}{x}, \dfrac{u-1}{u+1}=-\dfrac{x+1}{x-1}$，代入原式，则有：

$$f\left(-\frac{1}{x}\right)+2f\left(-\frac{x+1}{x-1}\right)=-\frac{1}{x}$$

令 $u=-\dfrac{x+1}{x-1}, \dfrac{u-1}{u+1}=x$，代入原式，则有：

$$f\left(-\frac{x+1}{x-1}\right)+2f(x)=-\frac{x+1}{x-1}$$

联立上式可以解得：

$$\begin{aligned}
-15f(x)&=x-\frac{2(x-1)}{x+1}-\frac{4}{x}+\frac{8(x+1)}{x-1}\\
&=\frac{x^2(x-1)(x+1)-2x(x-1)^2-4(x-1)(x+1)+8x(x+1)^2}{x(x-1)(x+1)}\\
&=\frac{x^4+6x^3+15x^2+6x+4}{x^3-x}
\end{aligned}$$

故有：

$$f(x)=-\frac{x^4+6x^3+15x^2+6x+4}{15x^3-15x}$$

No.032

设 a_0 是从还没开始投到停止的期望次数，a_1 是从“正”局面到停止的期望次数，a_2 是从“正反”局面到停止的期望次数，a_3 是从“正反反”到停止的期望，a_4 是从“正反反正”到停止的期望，那么显然 a_0 即为所求，且有：

$$\begin{aligned}
&a_0=1+\frac{1}{2}a_0+\frac{1}{2}a_1\\
&a_1=1+\frac{1}{2}a_1+\frac{1}{2}a_2\\
&a_2=1+\frac{1}{2}a_1+\frac{1}{2}a_3\\
&a_3=1+\frac{1}{2}a_4+\frac{1}{2}a_0\\
&a_4=0
\end{aligned}$$

即可解得 $a_0=18, a_1=16, a_2=14, a_3=10$。

No.033

由权方和不等式，可得：

$$\begin{aligned}\frac{a^3}{2}+\frac{b^3}{4}+\frac{c^3}{5}+\frac{d^3}{6} &= \frac{\left(a^2\right)^{\frac{3}{2}}}{4^{\frac{1}{2}}}+\frac{\left(b^2\right)^{\frac{3}{2}}}{16^{\frac{1}{2}}}+\frac{\left(c^2\right)^{\frac{3}{2}}}{25^{\frac{1}{2}}}+\frac{\left(d^2\right)^{\frac{3}{2}}}{36^{\frac{1}{2}}} \\ &\geq \frac{\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)^{\frac{3}{2}}}{(4+16+25+36)^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{4^{\frac{3}{2}}}{81^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{8}{9}\end{aligned}$$

当且仅当 $\frac{a}{2}=\frac{b}{4}=\frac{c}{5}=\frac{d}{6}$ 也即 $a=\frac{4}{9}, b=\frac{8}{9}, c=\frac{10}{9}, d=\frac{4}{3}$ 时原式取得最小值 $\frac{8}{9}$。

No.034

设 $f(x)=ax^2+bx+c$，则有：

$$f(f(x))=a^3x^4+2a^2bx^3+\left(ab^2+2a^2c+ab\right)x^2+\left(2abc+b^2\right)x+\left(ac^2+bc+c\right)$$

则有：

$$\begin{cases}a^3=-8 \\ 2a^2b=40 \\ ab^2+2a^2c+ab=-36 \\ 2abc+b^2=-35 \\ ac^2+bc+c=0\end{cases}$$

可以解得 $a=-2, b=5, c=3$，则 $f(x)=-2x^2+5x+3$。

则 $\sqrt{f(x)} \leq \sqrt{f\left(\frac{5}{4}\right)}=\frac{7\sqrt{2}}{4}$。

故 $\sqrt{f(x)}$ 值域为 $\left[0, \frac{7\sqrt{2}}{4}\right]$。

No.035

由插板法可得方程 $w+x+y+z=100$ 的所有正整数解 (w, x, y, z) 共有 $\binom{99}{3}=156849$ 组。

其中 w, x, y, z 满足以下条件时：

- 构成 a, a, a, a 形式的共有 1 组，在所有解中占据 1 组。
- 构成 a, a, a, b 形式的共有 $\left\lfloor\frac{100}{3}\right\rfloor-1=32$ 组，在所有解中占据 $32 \cdot 4=128$ 组。
- 构成 a, a, b, b 形式的共有 $\left\lfloor\frac{100}{4}\right\rfloor-1=24$ 组，在所有解中占据 $24 \cdot 6=144$ 组。

- 构成 a,a,b,c 形式的共有 $\sum\limits_{i=1}^{16}(i-1)+\sum\limits_{i=17}^{49}(i-2)+1=1144$ 组，在所有解中占据 $1144\cdot 12=13728$ 组。
- 构成 a,b,c,d 形式的共有 $\dfrac{156849-1-128-144-13728}{4!}=5952$ 组。

故满足 $w\le x\le y\le z$ 的解共有 $1+32+24+1144+5952=7153$ 组。

故所求概率为 $\dfrac{7153}{156849}$。

No.036

设 a_n 表示 $3\times n$ 的方格图用红、绿、蓝三种颜色进行染色，任意两个相邻格子颜色都不相同的方案数。

考虑 a_n 的递推方式。不难发现对于第 n 列，这一列三个格子的染色方案一定是下面的方案之一（R, G, B 分别表示红、绿、蓝三种颜色）：

$$\texttt{RGB},\texttt{RGR},\texttt{RBG},\texttt{RBR},\texttt{GRB},\texttt{GRG},\texttt{GBR},\texttt{GBG},\texttt{BGR},\texttt{BGB},\texttt{BRG},\texttt{BRB}$$

注意到这些方案只有两种本质不同的方案，即形为 ABA 和形为 ABC，考虑这两种的区别：

- 对于第 n 列为形为 ABA 的染色方案，不妨为 RGR，那么第 $n+1$ 列只能为以下 5 种染色方案：

$$\texttt{GRB},\texttt{GRG},\texttt{GBG},\texttt{BRG},\texttt{BRB}$$

- 对于第 n 列为形为 ABC 的染色方案，不妨为 RGB，那么第 $n+1$ 列只能为以下 5 种染色方案：

$$\texttt{GRB},\texttt{GRG},\texttt{GBR},\texttt{GBG},\texttt{BRG}$$

不难发现无论第 n 列的染色方案是哪一种，第 $n+1$ 列一定会有 5 种选择，即 $a_{n+1}=5a_n$，又因为有 $a_1=12$，故 $a_n=12\cdot 5^{n-1}$。

故所求概率为 $\dfrac{a_{2024}}{3^{3\cdot 2024}}=\dfrac{12\cdot 5^{2023}}{3^{6072}}$。

No.037

设向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{CA},\boldsymbol{b}=\overrightarrow{CB}$。

则 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a},\overrightarrow{AN}=\dfrac{\alpha}{\alpha+1}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$，则有 $\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AN}=\dfrac{1}{\alpha+1}\boldsymbol{a}+\dfrac{\alpha}{\alpha+1}\boldsymbol{b}$。

则 $\overrightarrow{CM}=\dfrac{2\alpha^3}{2\alpha^3+1}\boldsymbol{b}$，则有 $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{CM}-\overrightarrow{CA}=\dfrac{2\alpha^3}{2\alpha^3+1}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$。

设 $\dfrac{AP}{PM}=\lambda$，即 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PM}$，则有 $\overrightarrow{AP}=\dfrac{\lambda}{\lambda+1}\overrightarrow{AM}=\dfrac{\lambda}{\lambda+1}\cdot\dfrac{2\alpha^3}{2\alpha^3+1}\boldsymbol{b}-\dfrac{\lambda}{\lambda+1}\boldsymbol{a}$。

则 $\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AP}=\dfrac{1}{\lambda+1}\boldsymbol{a}+\dfrac{\lambda}{\lambda+1}\cdot\dfrac{2\alpha^3}{2\alpha^3+1}\boldsymbol{b}$。

由于 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线，且 C,P,N 三点共线，所以有：

$$\frac{\dfrac{1}{\lambda+1}}{\dfrac{\lambda}{\lambda+1}\cdot\dfrac{2\alpha^3}{2\alpha^3+1}}=\frac{\dfrac{1}{\alpha+1}}{\dfrac{\alpha}{\alpha+1}}$$

可以解得 $\lambda=\alpha+\dfrac{1}{2\alpha^2}\geq 3\sqrt[3]{\dfrac{\alpha}{2}\cdot\dfrac{\alpha}{2}\cdot\dfrac{1}{2\alpha^2}}=\dfrac{3}{2}$，此时 $\alpha=1$。

No.038

对于 $(x+1)^n$ 展开后 x^k 的系数为 $\binom{n}{k}=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$。

若 $(x+1)^n$ 展开后存在连续三项的系数为等差数列，不妨设中间项为 x^k 所对应的系数，则剩余两项即为 x^{k-1},x^{k+1} 所对应的系数，由于其成等差数列，故有：

$$2\binom{n}{k}=\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k+1}$$

即：

$$\frac{2n!}{k!(n-k)!}=\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}+\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}$$

等式两边同乘 $\dfrac{(k+1)!(n-k+1)!}{n!}$ 可得：

$$2(k+1)(n-k+1)=k(k+1)+(n-k)(n-k+1)$$

即：

$$4k^2-4nk+n^2-n-2=0$$

则有 $k=\dfrac{4n\pm\sqrt{(4n)^2-16(n^2-n-2)}}{8}=\dfrac{n\pm\sqrt{n+2}}{2}$。

由于 k 为正整数，故 $n+2$ 为完全平方数，此时 n 与 $\sqrt{n+2}$ 同奇偶，故 k 一定为正整数。

故所有可能的 n 值为：

$$119,142,167,194,223,254,287,322,359,398,439,482,527,574,623,674,727,782,839,898,959$$

其中使得 $a+2b+3c$ 最小的 n 即为 322。

No.039

> 引理：扩展权方和不等式
>
> 对于 $x_k,a_k,p\in\mathbb{R}_+$，且 $\lambda\geq 1$，有：

> $$\sum_{k=1}^{n}\frac{{x_k}^{p+\lambda}}{{a_k}^{p}}\geq\frac{1}{n^{\lambda-1}}\frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n}x_k\right)^{p+\lambda}}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\right)^{p}}$$
>
> > 证明：
> >
> > 由权方和不等式可知：
> >
> > $$\sum_{k=1}^{n}\frac{{x_k}^{p+\lambda}}{{a_k}^{p}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\left({x_k}^{\frac{p+\lambda}{p+1}}\right)^{p+1}}{{a_k}^{p}}\geq\frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n}{x_k}^{\frac{p+\lambda}{p+1}}\right)^{p+1}}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\right)^{p}}$$
> >
> > 又因为 $\dfrac{p+\lambda}{p+1}-1\geq 0$，再由权方和不等式可知：
> >
> > $$\sum_{k=1}^{n}{x_k}^{\frac{p+\lambda}{p+1}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{{x_k}^{\frac{p+\lambda}{p+1}}}{1^{\frac{p+\lambda}{p+1}-1}}\geq\frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n}x_k\right)^{\frac{p+\lambda}{p+1}}}{n^{\frac{p+\lambda}{p+1}-1}}$$
> >
> > 结合上述两不等式可得：
> >
> > $$\sum_{k=1}^{n}\frac{{x_k}^{p+\lambda}}{{a_k}^{p}}\geq\frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n}{x_k}^{\frac{p+\lambda}{p+1}}\right)^{p+1}}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\right)^{p}}\geq\frac{1}{n^{\lambda-1}}\frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n}x_k\right)^{\lambda}}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\right)^{p}}$$
> >
> > 当且仅当 $x_1=x_2=\ldots=x_n$ 且 $a_1=a_2=\ldots=a_n$ 时取等。

令 $\sigma=a+b+c$，由扩展权方和不等式可知：

$$\frac{a^3}{b+c}+\frac{b^3}{c+a}+\frac{c^3}{a+b}\geq\frac{(a+b+c)^3}{6(a+b+c)}=\frac{\sigma^2}{6}$$

由权方和不等式可知：

$$\frac{2}{b+c}+\frac{2}{c+a}+\frac{2}{a+b}\geq\frac{9}{a+b+c}=\frac{9}{\sigma}$$

由基本不等式可得：

$$\frac{a^3+2}{b+c}+\frac{b^3+2}{c+a}+\frac{c^3+2}{a+b}\geq\frac{\sigma^2}{6}+\frac{9}{\sigma}\geq 3\sqrt[3]{\frac{\sigma^2}{6}\cdot\frac{9}{2\sigma}\cdot\frac{9}{2\sigma}}=\frac{9}{2}$$

当 $a=b=c=1$ 时取等。

No.040

设向量 $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AB},\boldsymbol{c}=\overrightarrow{AC}$，则 $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}$。

因为 I 在三角形的两条角平分线上，所以有 $\overrightarrow{AI}=\lambda_1\left(\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}+\frac{\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{c}|}\right)=\frac{\lambda_1}{4}\boldsymbol{b}+\frac{\lambda_1}{5}\boldsymbol{c}$，且有 $\overrightarrow{BI}=\mu_1\left(\frac{-\boldsymbol{b}}{|-\boldsymbol{b}|}+\frac{\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}|}\right)=\frac{\mu_1}{6}\boldsymbol{c}-\frac{5\mu_1}{12}\boldsymbol{b}$，且 $\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AI}=\frac{\lambda_1-4}{4}\boldsymbol{b}+\frac{\lambda_1}{5}\boldsymbol{c}$，由于 $\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 不共线，故有:

$$\frac{\frac{\lambda_1-4}{4}}{-\frac{5\mu_1}{12}}=\frac{\frac{\lambda_1}{5}}{\frac{\mu_1}{6}}=1$$

可以解得 $\lambda_1=\frac{4}{3}$，故 $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\boldsymbol{b}+\frac{4}{15}\boldsymbol{c}$。

由余弦定理可得 $\cos A=\frac{AC^2+AB^2-BC^2}{2AC\cdot AB}=\frac{1}{8},\cos B=\frac{9}{16},\cos C=\frac{3}{4}$

因为 H 在三角形的两条高上，所以有 $\overrightarrow{AH}=\lambda_2\left(\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|\cos B}+\frac{\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{c}|\cos C}\right)=\frac{4\lambda_2}{9}\boldsymbol{b}+\frac{4\lambda_2}{15}\boldsymbol{c}$，且有 $\overrightarrow{BH}=\mu_2\left(\frac{-\boldsymbol{b}}{|-\boldsymbol{b}|\cos A}+\frac{\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}|\cos C}\right)=\frac{2\mu_2}{9}\boldsymbol{c}-\frac{20\mu_2}{9}\boldsymbol{b}$，且 $\overrightarrow{BH}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AH}=\frac{4\lambda_2-9}{9}\boldsymbol{b}+\frac{4\lambda_2}{15}\boldsymbol{c}$，由于 $\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 不共线，故有:

$$\frac{\frac{4\lambda_2-9}{9}}{-\frac{20\mu_2}{9}}=\frac{\frac{4\lambda_2}{15}}{\frac{2\mu_2}{9}}=1$$

可以解得 $\lambda_2=\frac{9}{28}$，故 $\overrightarrow{AH}=\frac{1}{7}\boldsymbol{b}+\frac{3}{35}\boldsymbol{c}$。

故 $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AH}\right)=\frac{5}{21}\boldsymbol{b}+\frac{37}{210}\boldsymbol{c}$。

故 $AM=\left|\overrightarrow{AM}\right|=\sqrt{\left|\frac{5}{21}\boldsymbol{b}\right|^2+\left|\frac{37}{210}\boldsymbol{c}\right|^2+2\left|\frac{5}{21}\boldsymbol{b}\right|\left|\frac{37}{210}\boldsymbol{c}\right|\cos A}=\sqrt{\frac{53}{28}}=\frac{\sqrt{371}}{14}$。