

No.031

题目

求解函数方程：

$$f(x) + 2f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = x$$

解析

令 $u = \frac{x-1}{x+1}$, $\frac{u-1}{u+1} = -\frac{1}{x}$, 代入原式, 则有:

$$f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + 2f\left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{x-1}{x+1}$$

令 $u = -\frac{1}{x}$, $\frac{u-1}{u+1} = -\frac{x+1}{x-1}$, 代入原式, 则有:

$$f\left(-\frac{1}{x}\right) + 2f\left(-\frac{x+1}{x-1}\right) = -\frac{1}{x}$$

令 $u = -\frac{x+1}{x-1}$, $\frac{u-1}{u+1} = x$, 代入原式, 则有:

$$f\left(-\frac{x+1}{x-1}\right) + 2f(x) = -\frac{x+1}{x-1}$$

联立上式可以解得:

$$\begin{aligned} -15f(x) &= x - \frac{2(x-1)}{x+1} - \frac{4}{x} + \frac{8(x+1)}{x-1} \\ &= \frac{x^2(x-1)(x+1) - 2x(x-1)^2 - 4(x-1)(x+1) + 8x(x+1)^2}{x(x-1)(x+1)} \\ &= \frac{x^4 + 6x^3 + 15x^2 + 6x + 4}{x^3 - x} \end{aligned}$$

故有:

$$f(x) = -\frac{x^4 + 6x^3 + 15x^2 + 6x + 4}{15x^3 - 15x}$$

by CXY.

No.032

题目

有一枚均匀的硬币（即抛出正反面的概率相同），反复抛该硬币直至连续四次抛掷出现“正反反正”局面，求期望抛多少次硬币。

解析

设 a_0 是从还没开始投到停止的期望次数， a_1 是从“正”局面到停止的期望次数， a_2 是从“正反”局面到停止的期望次数， a_3 是从“正反反”到停止的期望， a_4 是从“正反反正”到停止的期望，那么显然 a_0 即为所求，且有：

$$\begin{aligned}a_0 &= 1 + \frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{2}a_1 \\a_1 &= 1 + \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2}a_2 \\a_2 &= 1 + \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2}a_3 \\a_3 &= 1 + \frac{1}{2}a_4 + \frac{1}{2}a_0 \\a_4 &= 0\end{aligned}$$

即可解得 $a_0 = 18, a_1 = 16, a_2 = 14, a_3 = 10$ 。

by CXY。

No.033

题目

设正实数 a, b, c, d 满足 $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4$ ，求下式的最小值：

$$\frac{a^3}{2} + \frac{b^3}{4} + \frac{c^3}{5} + \frac{d^3}{6}$$

解析

由权方和不等式，可得：

$$\begin{aligned}\frac{a^3}{2} + \frac{b^3}{4} + \frac{c^3}{5} + \frac{d^3}{6} &= \frac{(a^2)^{\frac{3}{2}}}{4^{\frac{1}{2}}} + \frac{(b^2)^{\frac{3}{2}}}{16^{\frac{1}{2}}} + \frac{(c^2)^{\frac{3}{2}}}{25^{\frac{1}{2}}} + \frac{(d^2)^{\frac{3}{2}}}{36^{\frac{1}{2}}} \\&\geq \frac{(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}}{(4 + 16 + 25 + 36)^{\frac{1}{2}}} \\&= \frac{4^{\frac{3}{2}}}{81^{\frac{1}{2}}} \\&= \frac{8}{9}\end{aligned}$$

当且仅当 $\frac{a}{2} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5} = \frac{d}{6}$ 也即 $a = \frac{4}{9}, b = \frac{8}{9}, c = \frac{10}{9}, d = \frac{4}{3}$ 时原式取得最小值 $\frac{8}{9}$ 。

by CXY。

No.034

题目

二次函数 $f(x)$ 满足：

$$f(f(x)) = -8x^4 + 40x^3 - 36x^2 - 35x$$

求 $\sqrt{f(x)}$ 的值域。

解析

设 $f(x) = ax^2 + bx + c$ ，则有：

$$f(f(x)) = a^3x^4 + 2a^2bx^3 + (ab^2 + 2a^2c + ab)x^2 + (2abc + b^2)x + (ac^2 + bc + c)$$

则有：

$$\begin{cases} a^3 = -8 \\ 2a^2b = 40 \\ ab^2 + 2a^2c + ab = -36 \\ 2abc + b^2 = -35 \\ ac^2 + bc + c = 0 \end{cases}$$

可以解得 $a = -2, b = 5, c = 3$ ，则 $f(x) = -2x^2 + 5x + 3$ 。

$$\text{则 } \sqrt{f(x)} \leq \sqrt{f\left(\frac{5}{4}\right)} = \frac{7\sqrt{2}}{4}.$$

$$\text{故 } \sqrt{f(x)} \text{ 值域为 } \left[0, \frac{7\sqrt{2}}{4}\right].$$

by CXY.

No.035

题目

若 (w, x, y, z) 为方程 $w + x + y + z = 100$ 的正整数解，求其中 $w \leq x \leq y \leq z$ 的概率。

解析

由插板法可得方程 $w + x + y + z = 100$ 的所有正整数解 (w, x, y, z) 共有 $\binom{99}{3} = 156849$ 组。

其中 w, x, y, z 满足以下条件时：

- 构成 a, a, a, a 形式的共有 1 组，在所有解中占据 1 组。
- 构成 a, a, a, b 形式的共有 $\left\lfloor \frac{100}{3} \right\rfloor - 1 = 32$ 组，在所有解中占据 $32 \cdot 4 = 128$ 组。

- 构成 a, a, b, b 形式的共有 $\left\lfloor \frac{100}{4} \right\rfloor - 1 = 24$ 组，在所有解中占据 $24 \cdot 6 = 144$ 组。
- 构成 a, a, b, c 形式的共有 $\sum_{i=1}^{16} (i-1) + \sum_{i=17}^{49} (i-2) + 1 = 1144$ 组，在所有解中占据 $1144 \cdot 12 = 13728$ 组。
- 构成 a, b, c, d 形式的共有 $\frac{156849 - 1 - 128 - 144 - 13728}{4!} = 5952$ 组。

故满足 $w \leq x \leq y \leq z$ 的解共有 $1 + 32 + 24 + 1144 + 5952 = 7153$ 组。

故所求概率为 $\frac{7153}{156849}$ 。

by CXY。

No.036

题目

对 3×2024 的方格图用红、绿、蓝三种颜色进行染色，每个格子都等概率的是三种颜色之一，求任意两个相邻格子颜色都不相同的概率（可用指数形式表示）。

解析

设 a_n 表示 $3 \times n$ 的方格图用红、绿、蓝三种颜色进行染色，任意两个相邻格子颜色都不相同的方案数。

考虑 a_n 的递推方式。不难发现对于第 n 列，这一列三个格子的染色方案一定是下面的方案之一（R, G, B 分别表示红、绿、蓝三种颜色）：

RGB, RGR, RBG, RBR, GRB, GRG, GBR, GBG, BGR, BGB, BRG, BRB

注意到这些方案只有两种本质不同的方案，即形为 ABA 和形为 ABC，考虑这两种的区别：

- 对于第 n 列为形为 ABA 的染色方案，不妨为 RGR，那么第 $n+1$ 列只能为以下 5 种染色方案：

GRB, GRG, GBG, BRG, BRB

- 对于第 n 列为形为 ABC 的染色方案，不妨为 RGB，那么第 $n+1$ 列只能为以下 5 种染色方案：

GRB, GRG, GBR, GBG, BRG

不难发现无论第 n 列的染色方案是哪一种，第 $n+1$ 列一定会有 5 种选择，即 $a_{n+1} = 5a_n$ ，又因为有 $a_1 = 12$ ，故 $a_n = 12 \cdot 5^{n-1}$ 。

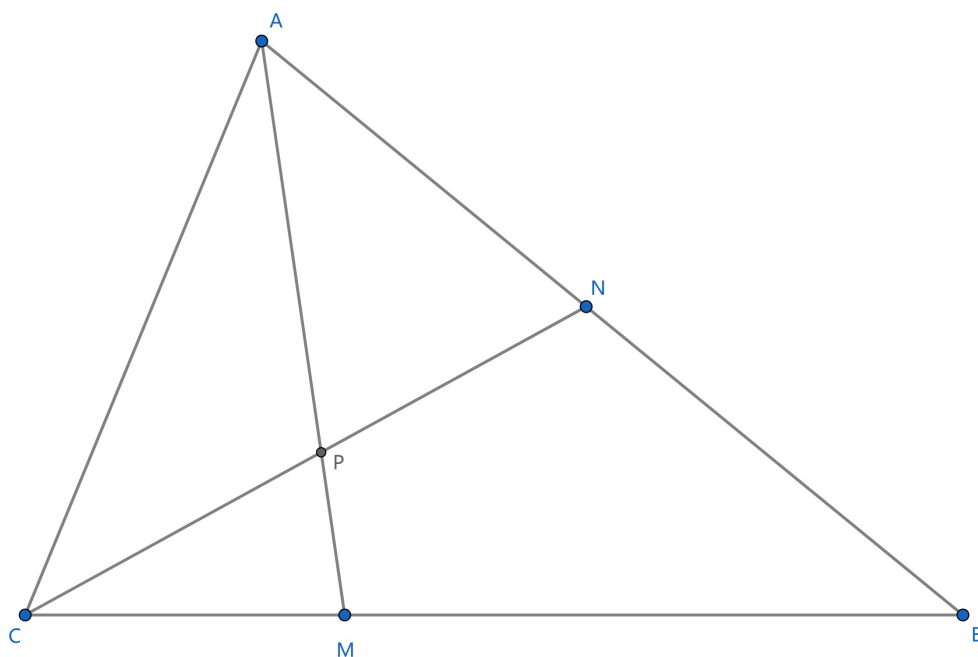
故所求概率为 $\frac{a_{2024}}{3^{3 \cdot 2024}} = \frac{12 \cdot 5^{2023}}{3^{6072}}$ 。

by CXY.

No.037

题目

如图, 在 $\triangle ABC$ 中, N 为线段 AB 上一点, 满足 $\overrightarrow{AN} = \alpha \overrightarrow{NB}$, M 为 BC 上一点, 满足 $\overrightarrow{CM} = 2\alpha^3 \overrightarrow{MB}$, 线段 CN 与线段 AM 交于点 P 。求当 α 变化时, $\frac{AP}{PM}$ 的最小值。



解析

设向量 $\mathbf{a} = \overrightarrow{CA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{CB}$ 。

则 $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$, $\overrightarrow{AN} = \frac{\alpha}{\alpha+1}(\mathbf{b} - \mathbf{a})$, 则有 $\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AN} = \frac{1}{\alpha+1}\mathbf{a} + \frac{\alpha}{\alpha+1}\mathbf{b}$ 。

则 $\overrightarrow{CM} = \frac{2\alpha^3}{2\alpha^3+1}\mathbf{b}$, 则有 $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{CM} - \overrightarrow{CA} = \frac{2\alpha^3}{2\alpha^3+1}\mathbf{b} - \mathbf{a}$ 。

设 $\frac{AP}{PM} = \lambda$, 即 $\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{PM}$, 则有 $\overrightarrow{AP} = \frac{\lambda}{\lambda+1} \overrightarrow{AM} = \frac{\lambda}{\lambda+1} \cdot \frac{2\alpha^3}{2\alpha^3+1}\mathbf{b} - \frac{\lambda}{\lambda+1}\mathbf{a}$ 。

则 $\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AP} = \frac{1}{\lambda+1}\mathbf{a} + \frac{\lambda}{\lambda+1} \cdot \frac{2\alpha^3}{2\alpha^3+1}\mathbf{b}$ 。

由于 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 不共线, 且 C, P, N 三点共线, 所以有:

$$\frac{\frac{1}{\lambda+1}}{\frac{\lambda}{\lambda+1} \cdot \frac{2\alpha^3}{2\alpha^3+1}} = \frac{\frac{1}{\alpha+1}}{\frac{\alpha}{\alpha+1}}$$

可以解得 $\lambda = \alpha + \frac{1}{2\alpha^2} \geq 3\sqrt[3]{\frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{1}{2\alpha^2}} = \frac{3}{2}$, 此时 $\alpha = 1$ 。

by CXY。

No.038

题目

若正整数 n 满足：将 $(x+1)^n$ 展开后按 x 的幂次从小到大排序，若存在连续三项的系数为等差数列，则称 n 是“好的”。若三位数 $n = \overline{abc}$ (即 $n = 100a + 10b + c$) 是“好的”，求使得 $a + 2b + 3c$ 最小的 n 。

解析

对于 $(x+1)^n$ 展开后 x^k 的系数为 $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ 。

若 $(x+1)^n$ 展开后存在连续三项的系数为等差数列，不妨设中间项为 x^k 所对应的系数，则剩余两项即为 x^{k-1}, x^{k+1} 所对应的系数，由于其成等差数列，故有：

$$2\binom{n}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k+1}$$

即：

$$\frac{2n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}$$

等式两边同乘 $\frac{(k+1)!(n-k+1)!}{n!}$ 可得：

$$2(k+1)(n-k+1) = k(k+1) + (n-k)(n-k+1)$$

即：

$$4k^2 - 4nk + n^2 - n - 2 = 0$$

$$\text{则有 } k = \frac{4n \pm \sqrt{(4n)^2 - 16(n^2 - n - 2)}}{8} = \frac{n \pm \sqrt{n+2}}{2}。$$

由于 k 为正整数，故 $n+2$ 为完全平方数，此时 n 与 $\sqrt{n+2}$ 同奇偶，故 k 一定为正整数。

故所有可能的 n 值为：

119, 142, 167, 194, 223, 254, 287, 322, 359, 398, 439, 482, 527, 574, 623, 674, 727, 782, 839, 898, 959

其中使得 $a + 2b + 3c$ 最小的 n 即为 322。

by CXY.

No.039

题目

若 a, b, c 是正实数, 求下式的最小值:

$$\frac{a^3+2}{b+c} + \frac{b^3+2}{c+a} + \frac{c^3+2}{a+b}$$

解析

引理: 扩展权方和不等式

对于 $x_k, a_k, p \in \mathbb{R}_+$, 且 $\lambda \geq 1$, 有:

$$\sum_{k=1}^n \frac{x_k^{p+\lambda}}{a_k^p} \geq \frac{1}{n^{\lambda-1}} \frac{\left(\sum_{k=1}^n x_k\right)^{p+\lambda}}{\left(\sum_{k=1}^n a_k\right)^p}$$

证明:

由权方和不等式可知:

$$\sum_{k=1}^n \frac{x_k^{p+\lambda}}{a_k^p} = \sum_{k=1}^n \frac{\left(x_k^{\frac{p+\lambda}{p+1}}\right)^{p+1}}{a_k^p} \geq \frac{\left(\sum_{k=1}^n x_k^{\frac{p+\lambda}{p+1}}\right)^{p+1}}{\left(\sum_{k=1}^n a_k\right)^p}$$

又因为 $\frac{p+\lambda}{p+1} - 1 \geq 0$, 再由权方和不等式可知:

$$\sum_{k=1}^n x_k^{\frac{p+\lambda}{p+1}} = \sum_{k=1}^n \frac{x_k^{\frac{p+\lambda}{p+1}}}{1^{\frac{p+\lambda}{p+1}-1}} \geq \frac{\left(\sum_{k=1}^n x_k\right)^{\frac{p+\lambda}{p+1}}}{n^{\frac{p+\lambda}{p+1}-1}}$$

结合上述两不等式可得:

$$\sum_{k=1}^n \frac{x_k^{p+\lambda}}{a_k^p} \geq \frac{\left(\sum_{k=1}^n x_k^{\frac{p+\lambda}{p+1}}\right)^{p+1}}{\left(\sum_{k=1}^n a_k\right)^p} \geq \frac{1}{n^{\lambda-1}} \frac{\left(\sum_{k=1}^n x_k\right)^{p+\lambda}}{\left(\sum_{k=1}^n a_k\right)^p}$$

当且仅当 $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ 且 $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ 时取等。

令 $\sigma = a + b + c$, 由扩展权方和不等式可知:

$$\frac{a^3}{b+c} + \frac{b^3}{c+a} + \frac{c^3}{a+b} \geq \frac{(a+b+c)^3}{6(a+b+c)} = \frac{\sigma^2}{6}$$

由权方和不等式可知：

$$\frac{2}{b+c} + \frac{2}{c+a} + \frac{2}{a+b} \geq \frac{9}{a+b+c} = \frac{9}{\sigma}$$

由基本不等式可得：

$$\frac{a^3+2}{b+c} + \frac{b^3+2}{c+a} + \frac{c^3+2}{a+b} \geq \frac{\sigma^2}{6} + \frac{9}{\sigma} \geq 3\sqrt[3]{\frac{\sigma^2}{6} \cdot \frac{9}{2\sigma} \cdot \frac{9}{2\sigma}} = \frac{9}{2}$$

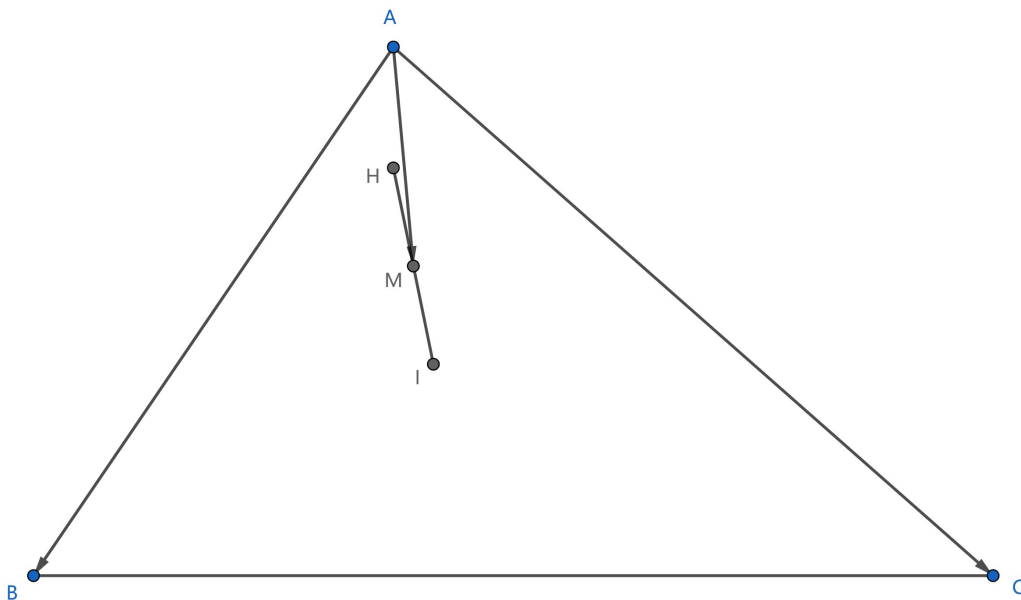
当 $a = b = c = 1$ 时取等。

by CXY。

No.040

题目

如图所示，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = 4, AC = 5, BC = 6$ ， I 为内心， H 为外心， M 为 IH 的中点，求 AM 。



解析

设向量 $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$ ，则 $\overrightarrow{BC} = \vec{c} - \vec{b}$ 。

因为 I 在三角形的两条角平分线上, 所以有 $\overrightarrow{AI} = \lambda_1 \left(\frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} + \frac{\mathbf{c}}{|\mathbf{c}|} \right) = \frac{\lambda_1}{4} \mathbf{b} + \frac{\lambda_1}{5} \mathbf{c}$, 且有 $\overrightarrow{BI} = \mu_1 \left(\frac{-\mathbf{b}}{|-\mathbf{b}|} + \frac{\mathbf{c}-\mathbf{b}}{|\mathbf{c}-\mathbf{b}|} \right) = \frac{\mu_1}{6} \mathbf{c} - \frac{5\mu_1}{12} \mathbf{b}$, 且 $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AI} = \frac{\lambda_1-4}{4} \mathbf{b} + \frac{\lambda_1}{5} \mathbf{c}$, 由于 $\mathbf{b}, \mathbf{c}$ 不共线, 故有:

$$\frac{\frac{\lambda_1-4}{4}}{-\frac{5\mu_1}{12}} = \frac{\frac{\lambda_1}{5}}{\frac{\mu_1}{6}} = 1$$

可以解得 $\lambda_1 = \frac{4}{3}$, 故 $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3} \mathbf{b} + \frac{4}{15} \mathbf{c}$ 。

由余弦定理可得 $\cos A = \frac{AC^2 + AB^2 - BC^2}{2AC \cdot AB} = \frac{1}{8}$, $\cos B = \frac{9}{16}$, $\cos C = \frac{3}{4}$

因为 H 在三角形的两条高上, 所以有 $\overrightarrow{AH} = \lambda_2 \left(\frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}| \cos B} + \frac{\mathbf{c}}{|\mathbf{c}| \cos C} \right) = \frac{4\lambda_2}{9} \mathbf{b} + \frac{4\lambda_2}{15} \mathbf{c}$, 且有 $\overrightarrow{BH} = \mu_2 \left(\frac{-\mathbf{b}}{|-\mathbf{b}| \cos A} + \frac{\mathbf{c}-\mathbf{b}}{|\mathbf{c}-\mathbf{b}| \cos C} \right) = \frac{2\mu_2}{9} \mathbf{c} - \frac{20\mu_2}{9} \mathbf{b}$, 且 $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AH} = \frac{4\lambda_2-9}{9} \mathbf{b} + \frac{4\lambda_2}{15} \mathbf{c}$, 由于 $\mathbf{b}, \mathbf{c}$ 不共线, 故有:

$$\frac{\frac{4\lambda_2-9}{9}}{-\frac{20\mu_2}{9}} = \frac{\frac{4\lambda_2}{15}}{\frac{2\mu_2}{9}} = 1$$

可以解得 $\lambda_2 = \frac{9}{28}$, 故 $\overrightarrow{AH} = \frac{1}{7} \mathbf{b} + \frac{3}{35} \mathbf{c}$ 。

故 $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2} \left(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AH} \right) = \frac{5}{21} \mathbf{b} + \frac{37}{210} \mathbf{c}$ 。

故 $AM = \left| \overrightarrow{AM} \right| = \sqrt{\left| \frac{5}{21} \mathbf{b} \right|^2 + \left| \frac{37}{210} \mathbf{c} \right|^2 + 2 \left| \frac{5}{21} \mathbf{b} \right| \left| \frac{37}{210} \mathbf{c} \right| \cos A} = \sqrt{\frac{53}{28}} = \frac{\sqrt{371}}{14}$ 。

by CXY。