No.021

设零点为 t，即 $f(t)=0$，则 $-3^t=m(t-2)+n$。

由柯西不等式可得：

$$\left(-3^t\right)^2=(m(t-2)+n)^2\leq\left(m^2+n^2\right)\left((t-2)^2+1^2\right)$$

则有：

$$m^2+n^2\geq\frac{9^t}{(t-2)^2+1^2}=\frac{9^t}{t^2-4t+5}$$

令 $g(t)=\dfrac{9^t}{t^2-4t+5}$，则有：

$$g'(t)=\frac{2\cdot 9^t\cdot\left(t^2\ln 3-t(1+4\ln 3)+(2+5\ln 3)\right)}{\left(t^2-4t+5\right)^2}$$

由于 $\dfrac{2\cdot 9^t}{\left(t^2-4t+5\right)^2}$ 恒为正，故考虑 $t^2\ln 3-t(1+4\ln 3)+(2+5\ln 3)$ 的正负，容易发现：

$$\begin{aligned}\Delta&=(1+4\ln 3)^2-4\ln 3\cdot(2+5\ln 3)\\&=16\ln^2 3+8\ln 3+1-8\ln 3-20\ln^2 3\\&=1-4\ln^2 3\\&<0\end{aligned}$$

故 $t^2\ln 3-t(1+4\ln 3)+(2+5\ln 3)$ 恒为正，故 $g'(t)$ 恒为正，故 $g(t)$ 单调递增。

故 $m^2+n^2\geq g(t)\geq g(2)=81$。

No.022

考虑什么情况下有 $f^{[30]}(1)=1$，不难发现 $f^{[1]}(1)=1$ 满足条件，$f^{[2]}(1)=1$ 也满足条件。不难发现对于任意 $n|30$，均有若 $f^{[n]}(1)=1$，则 $f^{[30]}(1)=1$。

不难发现满足 $f^{[1]}(1)=1$ 的函数有 $99!$ 个，满足 $f^{[2]}(1)=1$ 的函数有 $99!$ 个。不难发现对于任意 $n|30$，均有满足 $f^{[n]}(1)=1$ 的函数有 $99!$ 个。

又因为满足定义域与值域均为 U 的函数 f 总共有 $100!$ 个，故 $f^{[30]}(1)=1$ 的概率即为 $\dfrac{\sigma_0(30)\cdot 99!}{100!}=\dfrac{2}{25}$（其中 σ_0 为因数个数函数）。

No.023

由均值不等式可得：

$$
\begin{aligned}
a(2b-3c)(4c-5a) &= \frac{1}{180}\cdot 15a(8b-12c)(12c-15a) \\
&\le \frac{1}{180}\cdot\left(\frac{15a+(8b-12c)+(12c-15a)}{3}\right)^3 \\
&= \frac{1}{180}\cdot\left(\frac{8b}{3}\right)^3 \\
&= \frac{128}{1215}b^3
\end{aligned}
$$

当且仅当 $45a=8b=18c$ 时等号成立。

则有：

$$
\begin{aligned}
1458b^5+\frac{1}{a(2b-3c)(4c-5a)} &\ge 1458b^5+\frac{1215}{128b^3} \\
&= 486b^5+486b^5+486b^5+\frac{243}{128b^3}+\frac{243}{128b^3}+\frac{243}{128b^3}+\frac{243}{128b^3}+\frac{243}{128b^3} \\
&\ge 8\sqrt[8]{(486b^5)^3\left(\frac{243}{128b^3}\right)^5} \\
&= \frac{243}{2}
\end{aligned}
$$

等号成立当且仅当 $b=\dfrac{1}{2}$。

No.024

令 a_n 表示从 $n+3$ 道题选 n 道题全错的方案数，特别规定 $a_0=1$。

则有对于 $\forall n\in\mathbb{N}_+$：

$$
a_n=\mathrm{A}_{n+3}^{n}-\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}a_{n-i}
$$

这个式子的意义就是说 a_n 为所有合法的方案数减去蒙对 $1,2,\ldots,n$ 道题的方案数。

所以我们就有：

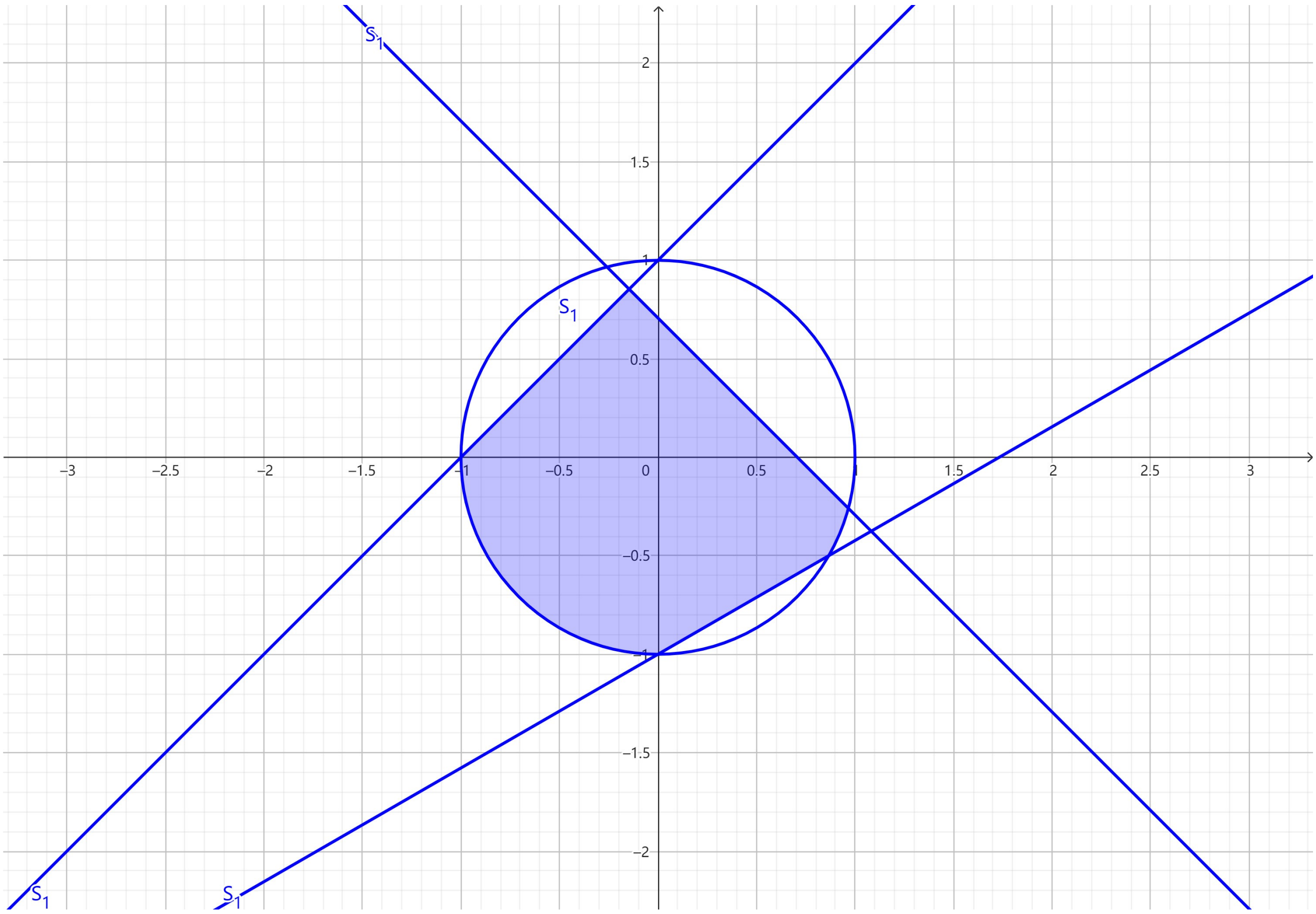
$$
\begin{aligned}
a_1 &= 3 \\
a_2 &= 13 \\
a_3 &= 71 \\
a_4 &= 465 \\
a_5 &= 3539 \\
a_6 &= 30637 \\
a_7 &= 296967
\end{aligned}
$$

所以答案即为 $\dfrac{a_7}{\mathrm{A}_{10}^{7}}=\dfrac{98989}{201600}$。

No.025

答案即为满足 $x+y\le\dfrac{\sqrt{2}}{2},x-\sqrt{3}y\le\sqrt{3},y-x\le 1,x^2+y^2\le 1$ 的图形的面积与满足 $x^2+y^2\le 1$ 的图形的面积的比，记前者的面积为 S_1，后者的面积为 S_2，则不难发现 $S_2=\pi$。

考虑如何求 S_1，可以先画出图像：

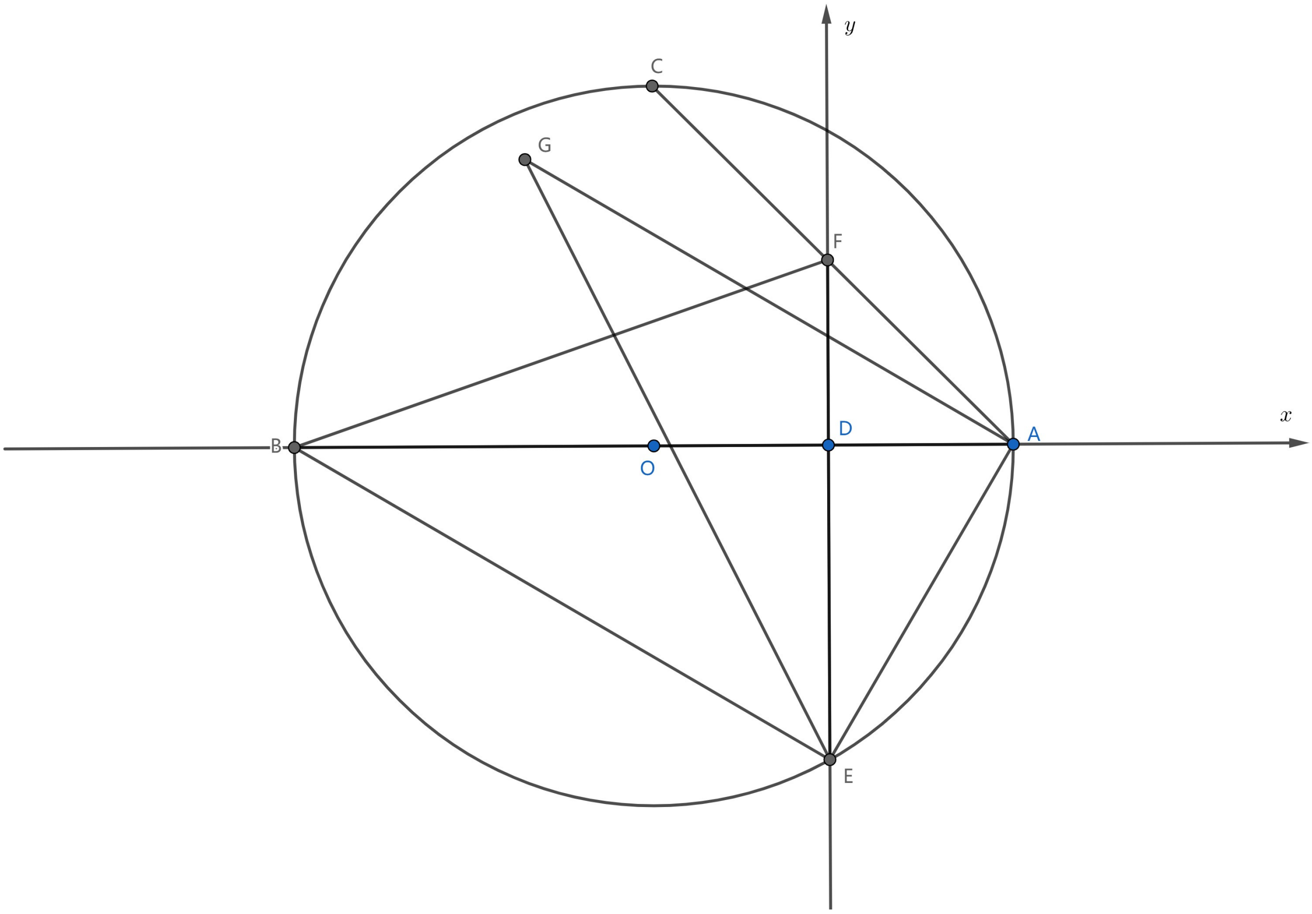


利用扇形面积和三角形面积差，经过分块运算，可以求得 $S_1=\dfrac{6+6\sqrt{2}+9\sqrt{3}+7\pi}{24}$。

所以答案即为 $\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{6+6\sqrt{2}+9\sqrt{3}+7\pi}{24\pi}$（该值约为 0.690532）。

No.026

以 D 为原点，DA 方向为 x 轴正半轴，DF 方向为 y 轴正半轴如图建立平面直角坐标系。设 $AO=1,AD=t$。



因为有 $AD=DF$，所以有 $l_{AF}: y=-x+t$ 且有 $F(0,t)$。因为有 $ep_{\odot O}:(x-t+1)^2+y^2=1$ 且 E 是 $\odot O$ 与 y 轴负半轴的交点，所以联立可以解得 $E(0,\sqrt{2t-t^2})$。

所以有 $S_{\triangle BDE}=\dfrac{1}{2}(2-t)\sqrt{2t-t^2}, S_{\triangle ADF}=\dfrac{1}{2}t^2$。

而又有 $AE=\sqrt{t^2+\left(\sqrt{2t-t^2}\right)^2}, AG=BF=\sqrt{t^2+(2-t)^2}$，故由柯西不等式可知 $S_{\triangle AEG}=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{t^2+\left(\sqrt{2t-t^2}\right)^2}\cdot\sqrt{t^2+(2-t)^2}\geq\dfrac{1}{2}\left(t^2+(2-t)\sqrt{2t-t^2}\right)=S_{\triangle BDE}+S_{\triangle ADF}$ 。故得证。

No.027

设从第 n 级台阶走到第 10 级台阶的期望步数为 a_n，则有:

$$\begin{cases} a_0 = a_2 + 1 \\ a_1 = \dfrac{a_0+1}{2} + \dfrac{a_3+1}{2} \\ a_2 = \dfrac{a_1+1}{2} + \dfrac{a_4+1}{2} \\ a_3 = \dfrac{a_2+1}{2} + \dfrac{a_5+1}{2} \\ a_4 = \dfrac{a_3+1}{2} + \dfrac{a_6+1}{2} \\ a_5 = \dfrac{a_4+1}{2} + \dfrac{a_7+1}{2} \\ a_6 = \dfrac{a_5+1}{2} + \dfrac{a_8+1}{2} \\ a_7 = \dfrac{a_6+1}{2} + \dfrac{a_9+1}{2} \\ a_8 = \dfrac{a_7+1}{2} + \dfrac{a_{10}+1}{2} \\ a_9 = a_8 + 1 \\ a_{10} = 0 \end{cases}$$

可以解得 $a_0 = \dfrac{307}{17}$。

No.028

构造数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_i = {x_{i-1}}^{\frac{5}{3}}, x = x_n$，则有：

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_0) &= 1 \\ f(x_2) - f(x_1) &= 1 \\ f(x_3) - f(x_2) &= 1 \\ &\cdots \\ f(x_n) - f(x_{n-1}) &= 1 \end{aligned}$$

累加可得 $f(x) - f(x_0) = n$。

因为 $x = x_n = {x_0}^{\left(\frac{5}{3}\right)^n}$，所以有 $n = \log_{\frac{5}{3}} \ln x - \log_{\frac{5}{3}} \ln x_0$，所以有：

$$f(x) - \log_{\frac{5}{3}} \ln x = f(x_0) - \log_{\frac{5}{3}} \ln x_0$$

令 $f(x_0) - \log_{\frac{5}{3}} \ln x_0 = C$，则 $f(x) = \log_{\frac{5}{3}} \ln x + C$。

No.029

因为有：

$$\begin{aligned} (a+b)^2 + (b+c)^2 + (c+a)^2 &= 2(a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) \\ &= \frac{32}{9} - 2(ab+bc+ca) \end{aligned}$$

所以原不等式即：

$$\frac{224}{9} - 14(ab+bc+ca) + 9abc \geq \frac{1408}{81}$$

即：

$$\frac{14}{9}(ab+bc+ca)-abc\le\frac{608}{729}$$

构造函数:

$$\begin{aligned}f(x)&=(x-a)(x-b)(x-c)\\&=x^3-\frac{4}{3}x^2+(ab+bc+ca)x-abc\end{aligned}$$

则有:

$$f\left(\frac{14}{9}\right)=\left(\frac{14}{9}\right)^3-\frac{4}{3}\left(\frac{14}{9}\right)^2+\frac{14}{9}(ab+bc+ca)-abc$$

且因为 $0<a,b,c<\dfrac{4}{3}$，故有:

$$\begin{aligned}f\left(\frac{14}{9}\right)&=\left(\frac{14}{9}-a\right)\left(\frac{14}{9}-b\right)\left(\frac{14}{9}-c\right)\\&\le\frac{1}{27}\left(\left(\frac{14}{9}-a\right)+\left(\frac{14}{9}-b\right)+\left(\frac{14}{9}-c\right)\right)^3\\&=\frac{1000}{729}\end{aligned}$$

故有 $f\left(\dfrac{14}{9}\right)\le\dfrac{1000}{729}$，即:

$$\left(\frac{14}{9}\right)^3-\frac{4}{3}\left(\frac{14}{9}\right)^2+\frac{14}{9}(ab+bc+ca)-abc\le\frac{1000}{729}$$

故有:

$$\frac{14}{9}(ab+bc+ca)-abc\le\frac{608}{729}$$

by CXY。

No.030

题目

甲乙轮流抛掷一枚质地均匀的硬币，若连续四次抛掷结果出现了”正正正反“则甲获胜，若出现了”正反反反“则乙获胜。求甲乙二人各自获胜的概率。

解析

设 S_A 是甲获胜时的局面的构型之和，S_B 是乙获胜时的局面的构型之和，N 为甲乙二人均不获胜的局面的构型之和。设正面记为 `Z`，反面记为 `F`，则有:

$$\begin{aligned}S_A&=\mathtt{ZZZF}+\mathtt{ZZZZF}+\mathtt{FZZZF}+\mathtt{ZZZZZF}+\mathtt{ZFZZZF}+\dots\\S_B&=\mathtt{ZFFF}+\mathtt{ZZFFF}+\mathtt{FZFFF}+\mathtt{ZFZFFF}+\mathtt{FZZFFF}+\dots\\N&=1+\mathtt{Z}+\mathtt{F}+\mathtt{ZZ}+\mathtt{ZF}+\mathtt{FZ}+\mathtt{FF}+\mathtt{ZZZ}+\mathtt{ZZF}+\dots\end{aligned}$$

那么就有:

$$
\begin{aligned}
1+N(\mathtt{Z}+\mathtt{F}) &= N+S_A+S_B \\
N(\mathtt{ZZZF}) &= S_A \\
N(\mathtt{ZFFF}) &= S_B+S_A(\mathtt{FF})
\end{aligned}
$$

令 $\mathtt{Z}=\mathtt{F}=\frac{1}{2}$，代入得:

$$
\begin{aligned}
1+N &= N+S_A+S_B \\
\frac{1}{16}N &= S_A \\
\frac{1}{16}N &= S_B+\frac{1}{4}S_A
\end{aligned}
$$

解得 $S_A=\frac{4}{7}, S_B=\frac{3}{7}$。