

No.021

题目

设函数 $f(x) = 3^x + m(x - 2) + n$ 在 $[2, 4]$ 上存在零点, 求 $m^2 + n^2$ 的最小值。

解析

设零点为 t , 即 $f(t) = 0$, 则 $-3^t = m(t - 2) + n$ 。

由柯西不等式可得:

$$(-3^t)^2 = (m(t - 2) + n)^2 \leq (m^2 + n^2) ((t - 2)^2 + 1^2)$$

则有:

$$m^2 + n^2 \geq \frac{9^t}{(t - 2)^2 + 1^2} = \frac{9^t}{t^2 - 4t + 5}$$

令 $g(t) = \frac{9^t}{t^2 - 4t + 5}$, 则有:

$$g'(t) = \frac{2 \cdot 9^t \cdot (t^2 \ln 3 - t(1 + 4 \ln 3) + (2 + 5 \ln 3))}{(t^2 - 4t + 5)^2}$$

由于 $\frac{2 \cdot 9^t}{(t^2 - 4t + 5)^2}$ 恒为正, 故考虑 $t^2 \ln 3 - t(1 + 4 \ln 3) + (2 + 5 \ln 3)$ 的正负, 容易发现:

$$\begin{aligned} \Delta &= (1 + 4 \ln 3)^2 - 4 \ln 3 \cdot (2 + 5 \ln 3) \\ &= 16 \ln^2 3 + 8 \ln 3 + 1 - 8 \ln 3 - 20 \ln^2 3 \\ &= 1 - 4 \ln^2 3 \\ &< 0 \end{aligned}$$

故 $t^2 \ln 3 - t(1 + 4 \ln 3) + (2 + 5 \ln 3)$ 恒为正, 故 $g'(t)$ 恒为正, 故 $g(t)$ 单调递增。

故 $m^2 + n^2 \geq g(t) \geq g(2) = 81$ 。

by HAR.

No.022

题目

对于集合 X 和函数 $f: X \rightarrow X$, 定义 f 的 n 次迭代 $f^{[n]}$ 为:

- 若 $n = 1$, 则 $f^{[1]} = f$ 。
- 若 $n > 1$, 则 $f^{[n]} = f \circ f^{[n-1]}$ 。

其中 $f \circ g$ 表示函数复合, 即 $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ 。

设集合 $U = \{x | 1 \leq x \leq 100, x \in \mathbb{N}_+\}$, 函数 f 为满足定义域与值域均为 U 的随机函数, 求 $f^{[30]}(1) = 1$ 的概率。

解析

考虑什么情况下有 $f^{[30]}(1) = 1$, 不难发现 $f^{[1]}(1) = 1$ 满足条件, $f^{[2]}(1) = 1$ 也满足条件。不难发现对于任意 $n | 30$, 均有若 $f^{[n]}(1) = 1$, 则 $f^{[30]}(1) = 1$ 。

不难发现满足 $f^{[1]}(1) = 1$ 的函数有 $99!$ 个, 满足 $f^{[2]}(1) = 1$ 的函数有 $99!$ 个。不难发现对于任意 $n | 30$, 均有满足 $f^{[n]}(1) = 1$ 的函数有 $99!$ 个。

又因为满足定义域与值域均为 U 的函数 f 总共有 $100!$ 个, 故 $f^{[30]}(1) = 1$ 的概率即为 $\frac{\sigma_0(30) \cdot 99!}{100!} = \frac{2}{25}$ (其中 σ_0 为因数个数函数)。

by CXY。

No.023

题目

若 a, b, c 均为正实数且 $2b > 3c, 4c > 5a$, 求下式的最小值:

$$1458b^5 + \frac{1}{a(2b-3c)(4c-5a)}$$

解析

由均值不等式可得:

$$\begin{aligned} a(2b-3c)(4c-5a) &= \frac{1}{180} \cdot 15a(8b-12c)(12c-15a) \\ &\leq \frac{1}{180} \cdot \left(\frac{15a + (8b-12c) + (12c-15a)}{3} \right)^3 \\ &= \frac{1}{180} \cdot \left(\frac{8b}{3} \right)^3 \\ &= \frac{128}{1215} b^3 \end{aligned}$$

当且仅当 $45a = 8b = 18c$ 时等号成立。

则有:

$$\begin{aligned}
1458b^5 + \frac{1}{a(2b-3c)(4c-5a)} &\geq 1458b^5 + \frac{1215}{128b^3} \\
&= 486b^5 + 486b^5 + 486b^5 + \frac{243}{128b^3} + \frac{243}{128b^3} + \frac{243}{128b^3} + \frac{243}{128b^3} + \frac{243}{128b^3} \\
&\geq 8\sqrt[8]{(486b^5)^3 \left(\frac{243}{128b^3}\right)^5} \\
&= \frac{243}{2}
\end{aligned}$$

等号成立当且仅当 $b = \frac{1}{2}$ 。

by CXY。

No.024

题目

这一次的英语考试变难了，原来的七选五现在变成了十选七，我们的英语学渣还是只会蒙题，不过他知道七个选项全都不同，所以他会随机的从合法的蒙法中选择一种来作为自己的答案，求他七道题全错的概率。

解析

令 a_n 表示从 $n+3$ 道题选 n 道题全错的方案数，特别规定 $a_0 = 1$ 。

则有对于 $\forall n \in \mathbb{N}_+$ ：

$$a_n = A_{n+3}^n - \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} a_{n-i}$$

这个式子的意义就是说 a_n 为所有合法的方案数减去蒙对 $1, 2, \dots, n$ 道题的方案数。

所以我们就有：

$$\begin{aligned}
a_1 &= 3 \\
a_2 &= 13 \\
a_3 &= 71 \\
a_4 &= 465 \\
a_5 &= 3539 \\
a_6 &= 30637 \\
a_7 &= 296967
\end{aligned}$$

所以答案即为 $\frac{a_7}{A_{10}^7} = \frac{98989}{201600}$ 。

by CXY。

No.025

题目

你要选择一组 (a, b) 满足以下条件：

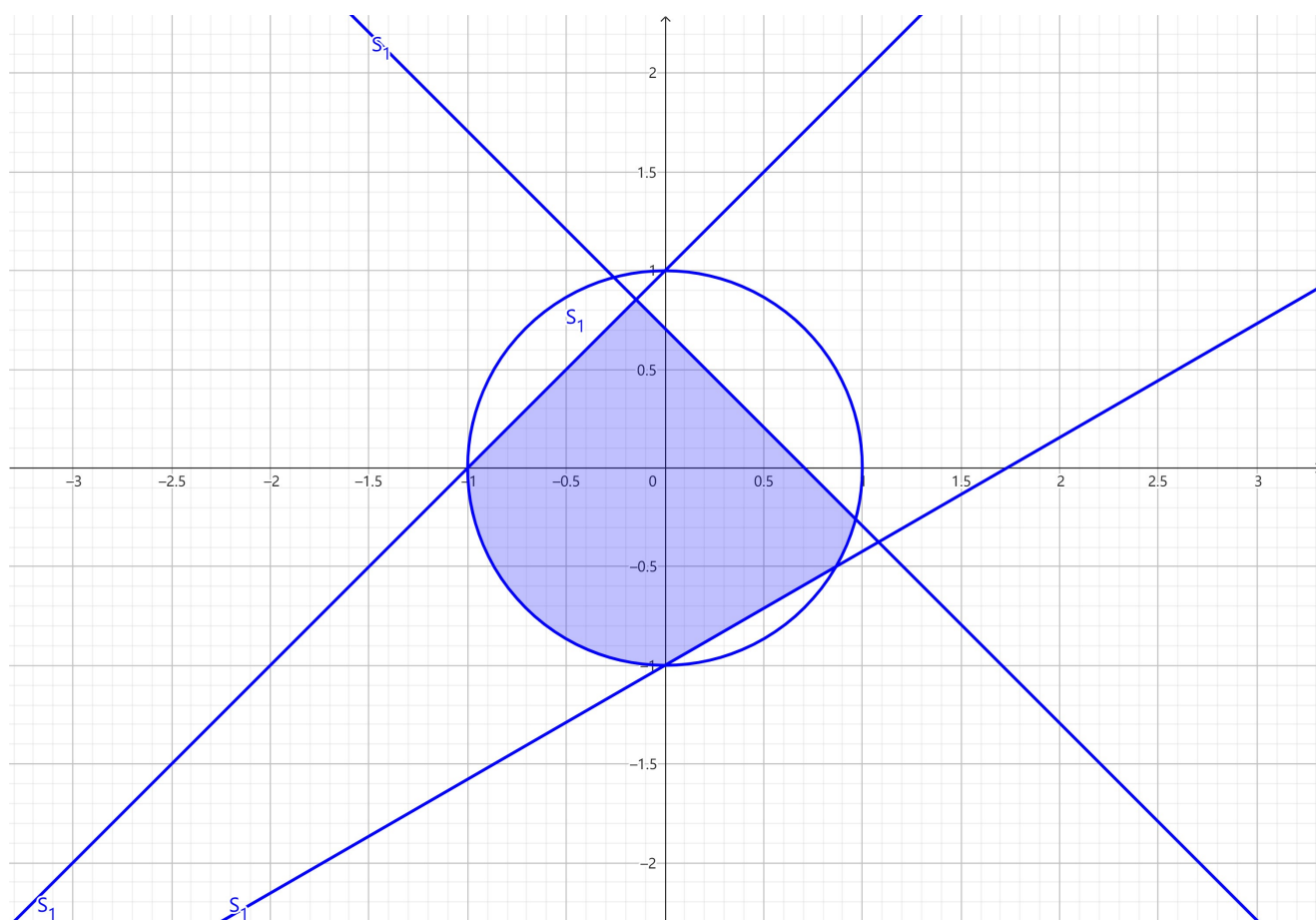
- $a + b \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $a - \sqrt{3}b \leq \sqrt{3}$
- $b - a \leq 1$

不过你很懒，只会从 $\{(a, b) | a^2 + b^2 \leq 1\}$ 中随机选择一个 (a, b) ，试问这样选出来的这组数满足上述条件的概率是多少。

解析

答案即为满足 $x + y \leq \frac{\sqrt{2}}{2}, x - \sqrt{3}y \leq \sqrt{3}, y - x \leq 1, x^2 + y^2 \leq 1$ 的图形的面积与满足 $x^2 + y^2 \leq 1$ 的图形的面积的比，记前者的面积为 S_1 ，后者的面积为 S_2 ，则不难发现 $S_2 = \pi$ 。

考虑如何求 S_1 ，可以先画出图像：



利用扇形面积和三角形面积差，经过分块运算，可以求得 $S_1 = \frac{6 + 6\sqrt{2} + 9\sqrt{3} + 7\pi}{24}$ 。

所以答案即为 $\frac{S_1}{S_2} = \frac{6 + 6\sqrt{2} + 9\sqrt{3} + 7\pi}{24\pi}$ (该值约为 0.690532)。

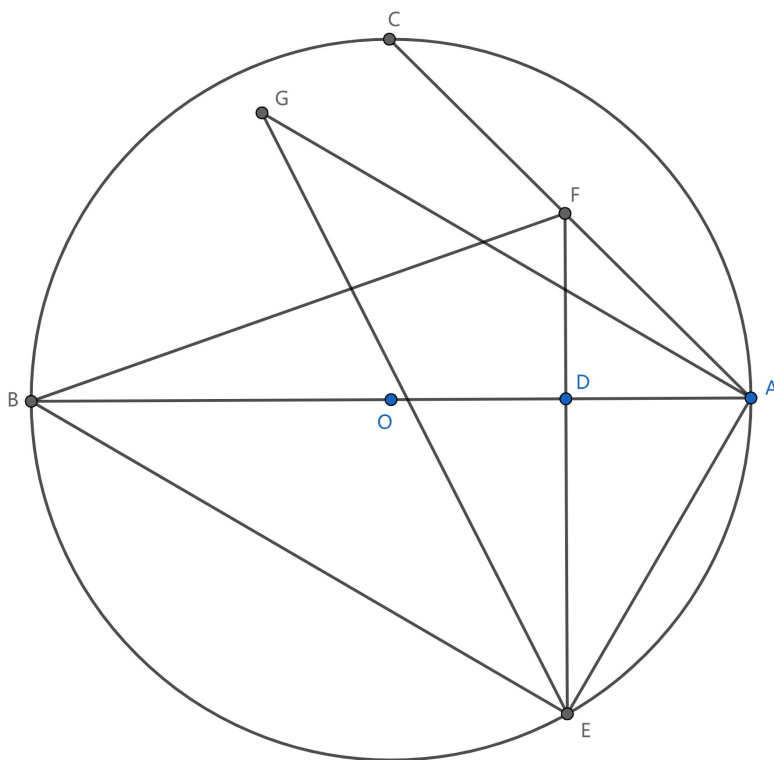
by CXY.

No.026

题目

如图, AB 是 $\odot O$ 的直径, $\angle BAC = 45^\circ$, D 是半径 OA 上的一动点, $DE \perp AB$ 交 $\odot O$ 于点 E , 交 AC 于点 F , 过 A 做 BE 的平行线 AG 且满足 $AG = BF$ 。求证:

$$S_{\triangle AEG} \geq S_{\triangle BDE} + S_{\triangle ADF}.$$



解析

以 D 为原点, DA 方向为 x 轴正半轴, DF 方向为 y 轴正半轴如图建立平面直角坐标系。设 $AO = 1, AD = t$ 。

$$\begin{cases} a_0 = a_2 + 1 \\ a_1 = \frac{a_0 + 1}{2} + \frac{a_3 + 1}{2} \\ a_2 = \frac{a_1 + 1}{2} + \frac{a_4 + 1}{2} \\ a_3 = \frac{a_2 + 1}{2} + \frac{a_5 + 1}{2} \\ a_4 = \frac{a_3 + 1}{2} + \frac{a_6 + 1}{2} \\ a_5 = \frac{a_4 + 1}{2} + \frac{a_7 + 1}{2} \\ a_6 = \frac{a_5 + 1}{2} + \frac{a_8 + 1}{2} \\ a_7 = \frac{a_6 + 1}{2} + \frac{a_9 + 1}{2} \\ a_8 = \frac{a_7 + 1}{2} + \frac{a_{10} + 1}{2} \\ a_9 = a_8 + 1 \\ a_{10} = 0 \end{cases}$$

可以解得 $a_0 = \frac{307}{17}$ 。

by CXY。

No.028

题目

求函数 $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, 使得 $f(x^5) - f(x^3) = 1$ 。

解析

构造数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_i = x_{i-1}^{\frac{5}{3}}, x = x_n$, 则有:

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_0) &= 1 \\ f(x_2) - f(x_1) &= 1 \\ f(x_3) - f(x_2) &= 1 \\ &\dots \\ f(x_n) - f(x_{n-1}) &= 1 \end{aligned}$$

累加可得 $f(x) - f(x_0) = n$ 。

因为 $x = x_n = x_0^{\left(\frac{5}{3}\right)^n}$, 所以有 $n = \log_{\frac{5}{3}} \ln x - \log_{\frac{5}{3}} \ln x_0$, 所以有:

$$f(x) - \log_{\frac{5}{3}} \ln x = f(x_0) - \log_{\frac{5}{3}} \ln x_0$$

令 $f(x_0) - \log_{\frac{5}{3}} \ln x_0 = C$, 则 $f(x) = \log_{\frac{5}{3}} \ln x + C$ 。

by CXY。

No.029

题目

设正实数 a, b, c 满足 $a + b + c = \frac{4}{3}$, 求证:

$$7(a+b)^2 + 7(b+c)^2 + 7(c+a)^2 + 9abc \geq \frac{1408}{81}$$

解析

因为有:

$$\begin{aligned}(a+b)^2 + (b+c)^2 + (c+a)^2 &= 2(a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) \\ &= \frac{32}{9} - 2(ab+bc+ca)\end{aligned}$$

所以原不等式即:

$$\frac{224}{9} - 14(ab+bc+ca) + 9abc \geq \frac{1408}{81}$$

即:

$$\frac{14}{9}(ab+bc+ca) - abc \leq \frac{608}{729}$$

构造函数:

$$\begin{aligned}f(x) &= (x-a)(x-b)(x-c) \\ &= x^3 - \frac{4}{3}x^2 + (ab+bc+ca)x - abc\end{aligned}$$

则有:

$$f\left(\frac{14}{9}\right) = \left(\frac{14}{9}\right)^3 - \frac{4}{3}\left(\frac{14}{9}\right)^2 + \frac{14}{9}(ab+bc+ca) - abc$$

且因为 $0 < a, b, c < \frac{4}{3}$, 故有:

$$\begin{aligned}f\left(\frac{14}{9}\right) &= \left(\frac{14}{9} - a\right)\left(\frac{14}{9} - b\right)\left(\frac{14}{9} - c\right) \\ &\leq \frac{1}{27}\left(\left(\frac{14}{9} - a\right) + \left(\frac{14}{9} - b\right) + \left(\frac{14}{9} - c\right)\right)^3 \\ &= \frac{1000}{729}\end{aligned}$$

故有 $f\left(\frac{14}{9}\right) \leq \frac{1000}{729}$, 即:

$$\left(\frac{14}{9}\right)^3 - \frac{4}{3}\left(\frac{14}{9}\right)^2 + \frac{14}{9}(ab+bc+ca) - abc \leq \frac{1000}{729}$$

故有:

$$\frac{14}{9}(ab + bc + ca) - abc \leq \frac{608}{729}$$

by CXY。

No.030

题目

甲乙轮流抛掷一枚质地均匀的硬币，若连续四次抛掷结果出现了“正正正反”则甲获胜，若出现了“正反反反”则乙获胜。求甲乙二人各自获胜的概率。

解析

设 S_A 是甲获胜时的局面的构型之和， S_B 是乙获胜时的局面的构型之和， N 为甲乙二人均不获胜的局面的构型之和。设正面记为 Z，反面记为 F，则有：

$$\begin{aligned} S_A &= \text{ZZZF} + \text{ZZZZF} + \text{FZZZF} + \text{ZZZZZF} + \text{ZFZZZF} + \dots \\ S_B &= \text{ZFFF} + \text{ZZFFF} + \text{FZFFF} + \text{ZFZFFF} + \text{FZZFFF} + \dots \\ N &= 1 + \text{Z} + \text{F} + \text{ZZ} + \text{ZF} + \text{FZ} + \text{FF} + \text{ZZZ} + \text{ZZF} + \dots \end{aligned}$$

那么就有：

$$\begin{aligned} 1 + N(\text{Z} + \text{F}) &= N + S_A + S_B \\ N(\text{ZZZF}) &= S_A \\ N(\text{ZFFF}) &= S_B + S_A(\text{FF}) \end{aligned}$$

令 $\text{Z} = \text{F} = \frac{1}{2}$ ，代入得：

$$\begin{aligned} 1 + N &= N + S_A + S_B \\ \frac{1}{16}N &= S_A \\ \frac{1}{16}N &= S_B + \frac{1}{4}S_A \end{aligned}$$

解得 $S_A = \frac{4}{7}, S_B = \frac{3}{7}$ 。

by CXY。