

## No.011

已知函数  $f(x)$  定义域为  $(0, 2)$  且有：

$$f(x) = \begin{cases} |\ln 2x|, & 0 < x < 1 \\ \ln 2 + \ln(2-x), & 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

有三实数  $a, b, c$ , 满足  $0 < a < b < c < 2$  且  $f(a) = f(b) = f(c)$ , 令：

$$m = \frac{1}{abc} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

求  $m$  的取值范围。

by LZW。

## No.012

两正实数  $x, y$  满足  $16x^2 - xy + y^2 = 1$ , 求  $4x + y$  的最大值。

请至少用四种方法解决本题。

by HAR。

## No.013

设有一函数  $f(x)$  定义域为  $[0, +\infty)$ , 且  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上单调递增。

且  $\forall x \in [0, +\infty), f(f(x) - \sqrt{3x}) = 3$ 。

若方程  $f(x+3) = x+k$  有且仅有两不同实数根, 求  $k$  的取值范围。

by HAR。

## No.014

设有一集合  $S = \{(a, b, c) \mid a, b, c \in \mathbb{N}_+ \text{ 且 } a, b, c \text{ 为某三角形的三边长}\}$ 。

求：

$$\sum_{(a,b,c) \in S} \frac{2^a \cdot 3^b}{7^b \cdot 11^c}$$

by FRY。

## No.015

求下式的值：

$$\sqrt{2^1 \sqrt{2^4 \sqrt{2^9 \sqrt{2^{16} \sqrt{\dots \sqrt{2^{n^2} \sqrt{\dots}}}}}}}}$$

by CXY。

## No.016

给定函数  $f(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{8}{x}$ ，若函数  $g(x) = f(x) - a$  ( $a \in \mathbb{R}$ ) 有三个零点，为  $x_1, x_2, x_3$  且  $x_1 < x_2 < x_3$ ，求  $\frac{x_1^3 + 1}{x_1} + \frac{x_2^3 + 1}{x_2}$  的取值范围。

by LZW。

## No.017

设函数  $f(x)$  满足对任意非零实数  $x$  均有  $f\left(\frac{1}{x}\right) = af(x) - 2x - 7$ ，且  $f(1) = 1$ 。

求  $F(x) = f(x)$  ( $x \in \{x \mid x \neq 0, f(x) \geq 5x\}$ ) 的值域。

by CXY。

## No.018

给定一个  $p \in (0, 1)$ ，并按下述规则生成一个  $x$ 。

- 若  $x$  未被生成，则进行尝试，有  $p$  的概率成功，若成功则将  $x$  设为 1。
- 若  $x$  未被生成，则进行尝试，有  $p$  的概率成功，若成功则将  $x$  设为 3。
- 若  $x$  未被生成，则进行尝试，有  $p$  的概率成功，若成功则将  $x$  设为 5。
- 若  $x$  未被生成，则进行尝试，有  $p$  的概率成功，若成功则将  $x$  设为 7。
- .....

求  $x$  的期望值。

by CXY。

## No.019

有一枚质地不均匀的四面体骰子，四面分别印有 1, 2, 3, 4，记投掷完后朝下面的数字为该次投掷的结果。

现在连续投掷两次该骰子，掷到的数和为 7 的概率等于和为 6 的概率等于差的绝对值为 2 的概率等于和为 2 的概率的 16 倍（若两次掷到的数分别为  $a, b$ ，则题意即

$$P(a + b = 7) = P(a + b = 6) = P(|a - b| = 2) = 16P(a + b = 2)) \text{ 。}$$

求一次投掷到 1, 2, 3, 4 的概率分别是多少。

by CXY。

## No.020

若  $x, y > 0$ , 求下式的最小值:

$$\frac{\sqrt{6x} + \sqrt{7x^2 + 5y^2}}{\sqrt{2x} + \sqrt{3y}}$$

by CXY。