

No.011

由图像法大致可知 $a \in \left(0, \frac{1}{2}\right), b \in \left(\frac{1}{2}, 1\right), c \in (1, 2)$, 故

$$f(a) = -\ln 2a, f(b) = \ln 2b, f(c) = \ln 2 + \ln(2 - c).$$

故有 $\ln 2a + \ln 2b = 0$ 即 $\ln 4ab = 0$, 故有 $ab = \frac{1}{4}$, 故 $a \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$.

因为 $\ln 2 + \ln(2 - x) = \ln(4 - 2x)$, 故 $y = \ln 2 + \ln(2 - x)$ 与 $y = \ln 2x$ 的图像关于 $x = 1$ 对称。

故有 $b + c = 2 \cdot 1 = 2$ 。

则:

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{abc} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \\ &= \frac{ab + ac + a + b + c + 1}{abc} \\ &= \frac{(a+1)(b+c+1)}{abc} \\ &= \frac{3(a+1)}{\frac{c}{4}} \\ &= \frac{3(a+1)}{\frac{8a-1}{16a}} \\ &= \frac{48a(a+1)}{8a-1} \end{aligned}$$

令 $t = 8a - 1, t \in (1, 3)$, 则 $a = \frac{t+1}{8}$, 则:

$$\begin{aligned} m &= \frac{3(t+1)(t+9)}{4t} \\ &= \frac{3}{4} \left(t + \frac{9}{t} + 10 \right) \end{aligned}$$

令 $g(t) = \frac{3}{4} \left(t + \frac{9}{t} + 10 \right)$, 易得 $g(t)$ 在 $(1, 3)$ 上单调递减, 故 $g(t) \in (g(3), g(1)) = (12, 15)$ ($t \in (1, 3)$)。

故 $m \in (12, 15)$ 。

No.012

法一：基本不等式

由均值不等式可得:

$$\begin{aligned}
 1 &= 16x^2 - xy + y^2 \\
 &= (4x + y)^2 - 9xy \\
 &= (4x + y)^2 - \frac{9}{4} \cdot 4xy \\
 &\geq (4x + y)^2 - \frac{9}{4} \left(\frac{4x + y}{2} \right)^2 \\
 &= \frac{7}{16} (4x + y)^2
 \end{aligned}$$

当且仅当 $4x = y = \frac{2\sqrt{7}}{7}$ 时不等式取等，故有：

$$4x + y \leq \sqrt{\frac{16}{7}} = \frac{4\sqrt{7}}{7}$$

法二：万能 k 法

令 $k = 4x + y$ ，则 $y = k - 4x$ 。

代入得：

$$16x^2 - x(k - 4x) + (k - 4x)^2 = 1$$

整理得 $36x^2 - 9kx + k^2 - 1 = 0$ 。

故有：

$$\Delta = 81k^2 - 144(k^2 - 1) \geq 0$$

即 $k^2 \leq \frac{16}{7}$ ，即 $k \leq \frac{4\sqrt{7}}{7}$ 。

法三：三角换元

$$1 = 16x^2 - xy + y^2 = \left(4x - \frac{1}{8}y\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{63}}{8}y\right)^2$$

令 $\sin \theta = 4x - \frac{1}{8}y$, $\cos \theta = \frac{\sqrt{63}}{8}y$ ，则有：

$$4x = \sin \theta + \frac{1}{\sqrt{63}} \cos \theta, y = \frac{8}{\sqrt{63}} \cos \theta$$

则有：

$$\begin{aligned}
4x + y &= \sin \theta + \frac{9}{\sqrt{63}} \cos \theta \\
&= \sqrt{1^2 + \left(\frac{9}{\sqrt{63}}\right)^2} \sin(\theta + \phi) \\
&\leq \sqrt{1^2 + \left(\frac{9}{\sqrt{63}}\right)^2} \\
&= \frac{4\sqrt{7}}{7}
\end{aligned}$$

当且仅当 $\theta + \phi = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ ($n \in \mathbb{Z}$) 时不等式取等。

法四：待定系数法

设 μ 满足：

$$1 = 16x^2 - xy + y^2 = \mu(4x + y)^2 + (1 - \mu)(4x - y)^2$$

解得 $\mu = \frac{7}{16}$ ，则 $\frac{7}{16}(4x + y)^2 \leq 1$ ，故 $4x + y \leq \frac{4\sqrt{7}}{7}$ 。

法五：齐次化法

$$\begin{aligned}
(4x + y)^2 &= \frac{(4x + y)^2}{1} \\
&= \frac{(4x + y)^2}{16x^2 - xy + y^2} \\
&= \frac{16x^2 + 8xy + y^2}{16x^2 - xy + y^2} \\
&= 1 + \frac{9xy}{16x^2 - xy + y^2} \\
&= 1 + \frac{9}{\frac{16x}{y} - 1 + \frac{y}{x}} \\
&\leq 1 + \frac{9}{2\sqrt{16} - 1} \\
&= \frac{16}{7}
\end{aligned}$$

故 $4x + y \leq \frac{4\sqrt{7}}{7}$ ，当且仅当 $4x = y = \frac{2\sqrt{7}}{7}$ 时不等式取等。

法六：轮换对称式地位等价法（慎用）

令 $4x = y$ ，则 $28x^2 = 1$ ，则 $x = \frac{1}{\sqrt{28}}$ ，则 $4x + y = 8x = \frac{8}{\sqrt{28}} = \frac{4\sqrt{7}}{7}$ 。

法七：向量不等式

构造向量 $\mathbf{a} = \left(4x - \frac{1}{8}y, \frac{\sqrt{63}}{8}y\right)$, $\mathbf{b} = \left(1, \frac{9}{\sqrt{63}}\right)$ 。

则有：

$$\begin{aligned}4x + y &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \\&\leq |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \\&= \sqrt{\left(4x - \frac{1}{8}y\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{63}}{8}y\right)^2} \cdot \sqrt{1^2 + \left(\frac{9}{\sqrt{63}}\right)^2} \\&= \frac{4\sqrt{7}}{7}\end{aligned}$$

No.013

因为 $f(x)$ 在定义域上单调递增且 $\forall x \in [0, +\infty), f(f(x) - \sqrt{3x}) = 3$ 。

所以设 $f(x) = \sqrt{3x} + t$ ，则有 $f(t) = \sqrt{3t} + t = 3$ 。

所以有 $t^2 - 9t + 9 = 0$ ，解得 $t = \frac{9 - 3\sqrt{5}}{2}$ （另一根大于 3，舍去）。

所以有 $f(x) = \sqrt{3x} + \frac{9 - 3\sqrt{5}}{2}$ 。

因为有 $f(x + 3) = x + k$ ，所以有 $\sqrt{3(x + 3)} + \frac{9 - 3\sqrt{5}}{2} = x + k$ 。

令 $u = \sqrt{x + 3}$ ($u \in [0, +\infty)$)，则 $x = u^2 - 3$ 。

所以有 $\sqrt{3}u + \frac{9 - 3\sqrt{5}}{2} = u^2 - 3 + k$ ，即 $g(u) = -u^2 + \sqrt{3}u + \frac{15 - 3\sqrt{5}}{2} = k$ 有两不等实根。

由于 $g(u)$ 为开口向下的二次函数且对称轴为 $u = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，故有

$$k \in \left[g(0), g\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \right] = \left[\frac{15 - 3\sqrt{5}}{2}, \frac{33 - 6\sqrt{5}}{4} \right]。$$

No.014

易知， a, b, c 是三角形的三边长，当且仅当存在正数 x, y, z 满足

$$a = \frac{x + y}{2}, b = \frac{y + z}{2}, c = \frac{z + x}{2}。$$

故有 $x = c + a - b, y = a + b - c, z = b + c - a$ ，即 x, y, z 均为正整数且同奇偶。不妨 $x = 2p - 1, y = 2q - 1, z = 2r - 1$ 或 $x = 2p, y = 2q, z = 2r$ ($p, q, r \in \mathbb{N}_+$)。

则有：

$$\begin{aligned}
\sum_{(a,b,c) \in S} \frac{2^a \cdot 3^b}{7^b \cdot 11^c} &= \sum_{p,q,r \in \mathbb{N}_+} \frac{2^{p+q-1} \cdot 3^{q+r-1}}{7^{q+r-1} \cdot 11^{r+p-1}} + \sum_{p,q,r \in \mathbb{N}_+} \frac{2^{p+q} \cdot 3^{q+r}}{7^{q+r} \cdot 11^{r+p}} \\
&= \left(\frac{2^{-1} \cdot 3^{-1}}{7^{-1} \cdot 11^{-1}} + 1 \right) \sum_{p,q,r \in \mathbb{N}_+} \frac{2^{p+q} \cdot 3^{q+r}}{7^{q+r} \cdot 11^{r+p}} \\
&= \frac{83}{6} \sum_{p,q,r \in \mathbb{N}_+} \frac{2^{p+q} \cdot 3^{q+r}}{7^{q+r} \cdot 11^{r+p}} \\
&= \frac{83}{6} \sum_{p,q,r \in \mathbb{N}_+} \left(\frac{2}{11} \right)^p \left(\frac{6}{7} \right)^q \left(\frac{3}{77} \right)^r \\
&= \frac{83}{6} \sum_{p \in \mathbb{N}_+} \left(\frac{2}{11} \right)^p \sum_{q \in \mathbb{N}_+} \left(\frac{6}{7} \right)^q \sum_{r \in \mathbb{N}_+} \left(\frac{3}{77} \right)^r \\
&= \frac{83}{6} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{6}{1} \cdot \frac{3}{74} \\
&= \frac{83}{111}
\end{aligned}$$

No.015

记所求值为 S ，则有：

$$S = 2^{\frac{1^2}{2^1} + \frac{2^2}{2^2} + \frac{3^2}{2^3} + \frac{4^2}{2^4} + \dots + \frac{n^2}{2^n} + \dots}$$

记 $T = \log_2 S$ ，则有：

$$T = \frac{1^2}{2^1} + \frac{2^2}{2^2} + \frac{3^2}{2^3} + \frac{4^2}{2^4} + \dots + \frac{n^2}{2^n} + \dots$$

则：

$$\frac{1}{2}T = \frac{1^2}{2^2} + \frac{2^2}{2^3} + \frac{3^2}{2^4} + \frac{4^2}{2^5} + \dots + \frac{(n-1)^2}{2^n} + \dots$$

则：

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}T &= T - \frac{1}{2}T \\
&= \frac{1^2}{2^1} + \frac{2^2 - 1^2}{2^2} + \frac{3^2 - 2^2}{2^3} + \frac{4^2 - 3^2}{2^4} + \dots + \frac{n^2 - (n-1)^2}{2^n} + \dots \\
&= \frac{1}{2^1} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \frac{7}{2^4} + \dots + \frac{2n-1}{2^n} + \dots
\end{aligned}$$

则：

$$\frac{1}{4}T = \frac{1}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{5}{2^4} + \frac{7}{2^5} + \dots + \frac{2n-3}{2^n} + \dots$$

则：

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}T &= \frac{1}{2}T - \frac{1}{4}T \\
&= \frac{1}{2^1} + \frac{3-1}{2^2} + \frac{5-3}{2^3} + \frac{7-5}{2^4} + \dots + \frac{(2n-1)-(2n-3)}{2^n} + \dots \\
&= \frac{1}{2^1} + \frac{2}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \frac{2}{2^4} + \dots + \frac{2}{2^n} + \dots \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots \\
&= \frac{1}{2} + 1 \\
&= \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

即 $T = 6$, 则 $S = 2^T = 64$ 。

No.016

由于 $y = \frac{x^2}{2}$ 和 $y = \frac{8}{x}$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 故 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减。

对于 $x \in (0, +\infty)$, $f(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{4}{x} + \frac{4}{x} \geq 3\sqrt[3]{\frac{x^2}{2} \cdot \frac{4}{x} \cdot \frac{4}{x}} = 6$, 当且仅当 $x = 2$ 时取等。故 $f(x)$ 在 $(0, 2)$ 上单调递减, 在 $(2, +\infty)$ 上单调递增。

因为 x_1, x_2 为 $g(x)$ 的零点, 所以有 $f(x_1) = f(x_2) = a$, 即:

$$\frac{x_1^2}{2} + \frac{8}{x_1} - \frac{x_2^2}{2} - \frac{8}{x_2} = 0$$

即:

$$(x_1 - x_2) \left(\frac{x_1 + x_2}{2} - \frac{8}{x_1 x_2} \right) = 0$$

因为有 $x_1 - x_2 \neq 0$, 所以 $\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{8}{x_1 x_2}$, 即 $x_1 + x_2 = \frac{16}{x_1 x_2}$ 。

当 $x_2 = 2$ 时, 可以解得 $x_1 = -4$, 此时 $x_1 + x_2 = -2$, 所以有 $x_1 + x_2 < -2$, 故有 $-8 < x_1 x_2 < 0$ 。

因为:

$$\begin{aligned}
\frac{x_1^3 + 1}{x_1} + \frac{x_2^3 + 1}{x_2} &= x_1^2 + x_2^2 + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \\
&= (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 + \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} \\
&= \left(\frac{16}{x_1 x_2} \right)^2 - 2x_1 x_2 + \frac{16}{(x_1 x_2)^2}
\end{aligned}$$

令 $t = -x_1 x_2$, 则 $t \in (0, 8)$, 则有:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{16}{x_1 x_2}\right)^2 - 2x_1 x_2 + \frac{16}{(x_1 x_2)^2} &= \left(\frac{16}{-t}\right)^2 + 2t + \frac{16}{t^2} \\
&= \frac{272}{t^2} + 2t \\
&\geq 3\sqrt[3]{\frac{272}{t^2} \cdot t \cdot t} \\
&= 6\sqrt[3]{34}
\end{aligned}$$

当且仅当 $t = 2\sqrt[3]{34} \in (0, 8)$ 时取等。

当 t 趋近于 0 时, $\frac{272}{t^2} + 2t$ 趋近于正无穷, 故原式无上界。

故原式取值范围为 $[6\sqrt[3]{34}, +\infty)$ 。

No.017

因为 $f(1) = 1$, 所以有 $1 = a - 2 - 7$, 即 $a = 10$ 。

联立下式:

$$\begin{cases} f\left(\frac{1}{x}\right) = 10f(x) - 2x - 7 \\ f(x) = 10f\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{2}{x} - 7 \end{cases}$$

可解得 $f(x) = \frac{20x}{99} + \frac{2}{99x} + \frac{7}{9}$ 。

则 $f(x) \geq 5x$ 即 $\frac{-475x}{99} + \frac{2}{99x} + \frac{7}{9} \geq 0$, 即 $\frac{-475x^2 + 77x + 2}{99x} \geq 0$, 即 $x(475x^2 - 77x - 2) \leq 0$ 。

因为 $475x^2 - 77x - 2$ 两根为 $\frac{77 \pm 3\sqrt{1081}}{950}$, 则:

$$x \left(x - \frac{77 + 3\sqrt{1081}}{950} \right) \left(x - \frac{77 - 3\sqrt{1081}}{950} \right) \leq 0$$

解得 $x \in \left(-\infty, \frac{77 - 3\sqrt{1081}}{950} \right] \cup \left(0, \frac{77 + 3\sqrt{1081}}{950} \right]$, 即 $F(x)$ 定义域为 $\left(-\infty, \frac{77 - 3\sqrt{1081}}{950} \right] \cup \left(0, \frac{77 + 3\sqrt{1081}}{950} \right]$ 。

当 $x > 0$ 时, 由均值不等式可知 $f(x) \geq \frac{4\sqrt{10}}{99} + \frac{7}{9}$, 当且仅当 $x = \frac{\sqrt{10}}{10}$ 时取等, 而此时

$\frac{\sqrt{10}}{10} > \frac{77 + 3\sqrt{1081}}{950}$ 。故当 $x > 0$ 时

$$F(x) \in \left[f\left(\frac{77 + 3\sqrt{1081}}{950}\right), +\infty \right) = \left[\frac{77 + 3\sqrt{1081}}{190}, +\infty \right)。$$

而当 $x < 0$ 时, 均值不等式可以取到等, 故此时 $F(x) \in \left(-\infty, \frac{77-4\sqrt{10}}{99}\right]$ 。

综上, $F(x)$ 的值域为 $\left(-\infty, \frac{77-4\sqrt{10}}{99}\right] \cup \left[\frac{77+3\sqrt{1081}}{190}, +\infty\right)$ 。

No.018

由期望的定义可知, 所求即为 $\sum_{i \in \mathbb{N}_+} p(1-p)^{i-1}(2i-1)$, 记该值为 S 。

则有:

$$(1-p)S = \sum_{i \in \mathbb{N}_+} p(1-p)^i(2i-1)$$

则:

$$pS = p + \sum_{i \in \mathbb{N}_+} 2p(1-p)^i$$

则:

$$S = 1 + 2 \sum_{i \in \mathbb{N}_+} (1-p)^i = \frac{2-p}{p}$$

No.019

设一次投掷到 1, 2, 3, 4 的概率分别为 p_1, p_2, p_3, p_4 , 则由题意可以列出:

$$2p_3p_4 = 2p_2p_4 + p_3^2 = 2p_1p_3 + 2p_2p_4 = 16p_1^2$$

且有 $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1, p_i \in (0, 1)$

解得 $p_1 = \frac{2}{17}, p_2 = \frac{3}{17}, p_3 = \frac{4}{17}, p_4 = \frac{8}{17}$ 。

No.020

设 $\lambda \in [-1, 1]$, 则有

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{6}x + \sqrt{7x^2 + 5y^2}}{\sqrt{2}x + \sqrt{3}y} &= \frac{\sqrt{6}x + \sqrt{\left(\left(\sqrt{7}x\right)^2 + \left(\sqrt{5}y\right)^2\right)\left(\lambda^2 + \left(\sqrt{1-\lambda^2}\right)^2\right)}}{\sqrt{2}x + \sqrt{3}y} \\ &\geq \frac{\sqrt{6}x + \sqrt{7}\lambda x + \sqrt{5}\sqrt{1-\lambda^2}y}{\sqrt{2}x + \sqrt{3}y} \\ &= \frac{\left(\sqrt{6} + \sqrt{7}\lambda\right)x + \sqrt{5}\sqrt{1-\lambda^2}y}{\sqrt{2}x + \sqrt{3}y} \end{aligned}$$

为使该式与 x, y 无关, 令:

$$\frac{\sqrt{6} + \sqrt{7}\lambda}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}\sqrt{1-\lambda^2}}{\sqrt{3}}$$

即:

$$3\sqrt{2} + \sqrt{21}\lambda = \sqrt{10 - 10\lambda^2}$$

即:

$$21\lambda^2 + 6\sqrt{42}\lambda + 18 = 10 - 10\lambda^2$$

即:

$$31\lambda^2 + 6\sqrt{42}\lambda + 8 = 0$$

解得 $\lambda = \frac{-3\sqrt{42} + \sqrt{130}}{31}$ (舍另一根)。

此时可得原式最小值即为 $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{7}\lambda}{\sqrt{2}} = \frac{10\sqrt{3} + \sqrt{455}}{31}$ 。