No.011

题目

已知函数 $f(x)$ 定义域为 $(0,2)$ 且有：

$$f(x)=\begin{cases}|\ln 2x|, & 0<x<1\\ \ln 2+\ln(2-x), & 1\le x<2\end{cases}$$

有三实数 a,b,c，满足 $0<a<b<c<2$ 且 $f(a)=f(b)=f(c)$，令：

$$m=\frac{1}{abc}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

求 m 的取值范围。

解析

由图像法大致可知 $a\in\left(0,\frac{1}{2}\right),b\in\left(\frac{1}{2},1\right),c\in(1,2)$，故 $f(a)=-\ln 2a,f(b)=\ln 2b,f(c)=\ln 2+\ln(2-c)$。

故有 $\ln 2a+\ln 2b=0$ 即 $\ln 4ab=0$，故有 $ab=\frac{1}{4}$，故 $a\in\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$。

因为 $\ln 2+\ln(2-x)=\ln(4-2x)$，故 $y=\ln 2+\ln(2-x)$ 与 $y=\ln 2x$ 的图像关于 $x=1$ 对称。

故有 $b+c=2\cdot 1=2$。

则：

$$\begin{aligned}m&=\frac{1}{abc}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\\&=\frac{ab+ac+a+b+c+1}{abc}\\&=\frac{(a+1)(b+c+1)}{abc}\\&=\frac{3(a+1)}{\frac{c}{4}}\\&=\frac{3(a+1)}{\frac{8a-1}{16a}}\\&=\frac{48a(a+1)}{8a-1}\end{aligned}$$

令 $t=8a-1,t\in(1,3)$，则 $a=\frac{t+1}{8}$，则：

$$
\begin{aligned}
m &= \frac{3(t+1)(t+9)}{4t} \\
&= \frac{3}{4}\left(t+\frac{9}{t}+10\right)
\end{aligned}
$$

令 $g(t)=\frac{3}{4}\left(t+\frac{9}{t}+10\right)$，易得 $g(t)$ 在 $(1,3)$ 上单调递减，故 $g(t)\in(g(3),g(1))=(12,15)$（$t\in(1,3)$）。

故 $m\in(12,15)$。

by LZW。

No.012

题目

两正实数 x,y 满足 $16x^2-xy+y^2=1$，求 $4x+y$ 的最大值。

请至少用四种方法解决本题。

解析

法一：基本不等式

由均值不等式可得:

$$
\begin{aligned}
1 &= 16x^2-xy+y^2 \\
&= (4x+y)^2-9xy \\
&= (4x+y)^2-\frac{9}{4}\cdot 4xy \\
&\geq (4x+y)^2-\frac{9}{4}\left(\frac{4x+y}{2}\right)^2 \\
&= \frac{7}{16}(4x+y)^2
\end{aligned}
$$

当且仅当 $4x=y=\frac{2\sqrt{7}}{7}$ 时不等式取等，故有:

$$
4x+y\leq\sqrt{\frac{16}{7}}=\frac{4\sqrt{7}}{7}
$$

法二：万能 k 法

令 $k=4x+y$，则 $y=k-4x$。

代入得:

$$
16x^2-x(k-4x)+(k-4x)^2=1
$$

整理得 $36x^2-9kx+k^2-1=0$。

故有：

$$\Delta=81k^2-144\left(k^2-1\right)\geq 0$$

即 $k^2\leq\frac{16}{7}$，即 $k\leq\frac{4\sqrt{7}}{7}$。

法三：三角换元

$$1=16x^2-xy+y^2=\left(4x-\frac{1}{8}y\right)^2+\left(\frac{\sqrt{63}}{8}y\right)^2$$

令 $\sin\theta=4x-\frac{1}{8}y,\cos\theta=\frac{\sqrt{63}}{8}y$，则有：

$$4x=\sin\theta+\frac{1}{\sqrt{63}}\cos\theta,y=\frac{8}{\sqrt{63}}\cos\theta$$

则有：

$$\begin{aligned}4x+y&=\sin\theta+\frac{9}{\sqrt{63}}\cos\theta\\&=\sqrt{1^2+\left(\frac{9}{\sqrt{63}}\right)^2}\sin\left(\theta+\phi\right)\\&\leq\sqrt{1^2+\left(\frac{9}{\sqrt{63}}\right)^2}\\&=\frac{4\sqrt{7}}{7}\end{aligned}$$

当且仅当 $\theta+\phi=\frac{\pi}{2}+2n\pi$（$n\in\mathbb{Z}$）时不等式取等。

法四：待定系数法

设 μ 满足：

$$1=16x^2-xy+y^2=\mu(4x+y)^2+(1-\mu)(4x-y)^2$$

解得 $\mu=\frac{7}{16}$，则 $\frac{7}{16}(4x+y)^2\leq 1$，故 $4x+y\leq\frac{4\sqrt{7}}{7}$。

法五：齐次化法

$$
\begin{aligned}
(4x+y)^2 &= \frac{(4x+y)^2}{1} \\
&= \frac{(4x+y)^2}{16x^2-xy+y^2} \\
&= \frac{16x^2+8xy+y^2}{16x^2-xy+y^2} \\
&= 1+\frac{9xy}{16x^2-xy+y^2} \\
&= 1+\frac{9}{\dfrac{16x}{y}-1+\dfrac{y}{x}} \\
&\le 1+\frac{9}{2\sqrt{16}-1} \\
&= \frac{16}{7}
\end{aligned}
$$

故 $4x+y\le\frac{4\sqrt{7}}{7}$，当且仅当 $4x=y=\frac{2\sqrt{7}}{7}$ 时不等式取等。

法六：轮换对称式地位等价法（慎用）

令 $4x=y$，则 $28x^2=1$，则 $x=\frac{1}{\sqrt{28}}$，则 $4x+y=8x=\frac{8}{\sqrt{28}}=\frac{4\sqrt{7}}{7}$。

法七：向量不等式

构造向量 $\boldsymbol{a}=\left(4x-\frac{1}{8}y,\frac{\sqrt{63}}{8}y\right),\boldsymbol{b}=\left(1,\frac{9}{\sqrt{63}}\right)$。

则有:

$$
\begin{aligned}
4x+y &= \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} \\
&\le |\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}| \\
&= \sqrt{\left(4x-\frac{1}{8}y\right)^2+\left(\frac{\sqrt{63}}{8}y\right)^2}\cdot\sqrt{1^2+\left(\frac{9}{\sqrt{63}}\right)^2} \\
&= \frac{4\sqrt{7}}{7}
\end{aligned}
$$

by HAR。

No.013

题目

设有一函数 $f(x)$ 定义域为 $[0,+\infty)$，且 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增。

且 $\forall x\in[0,+\infty),f\left(f(x)-\sqrt{3x}\right)=3$。

若方程 $f(x+3)=x+k$ 有且仅有两不同实数根，求 k 的取值范围。

解析

因为 $f(x)$ 在定义域上单调递增且 $\forall x \in [0,+\infty), f\left(f(x)-\sqrt{3x}\right)=3$。

所以设 $f(x)=\sqrt{3x}+t$，则有 $f(t)=\sqrt{3t}+t=3$。

所以有 $t^2-9t+9=0$，解得 $t=\dfrac{9-3\sqrt{5}}{2}$（另一根大于 3，舍去）。

所以有 $f(x)=\sqrt{3x}+\dfrac{9-3\sqrt{5}}{2}$。

因为有 $f(x+3)=x+k$，所以有 $\sqrt{3(x+3)}+\dfrac{9-3\sqrt{5}}{2}=x+k$。

令 $u=\sqrt{x+3}$（$u\in[0,+\infty)$），则 $x=u^2-3$。

所以有 $\sqrt{3}u+\dfrac{9-3\sqrt{5}}{2}=u^2-3+k$，即 $g(u)=-u^2+\sqrt{3}u+\dfrac{15-3\sqrt{5}}{2}=k$ 有两不等实根。

由于 $g(u)$ 为开口向下的二次函数且对称轴为 $u=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，故有
$k\in\left[g(0),g\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)=\left[\dfrac{15-3\sqrt{5}}{2},\dfrac{33-6\sqrt{5}}{4}\right)$。

by HAR。

No.014

题目

设有一集合 $S=\{(a,b,c)\mid a,b,c\in\mathbb{N}_+$ 且 a,b,c 为某三角形的三边长 $\}$。

求:

$$\sum_{(a,b,c)\in S}\frac{2^a\cdot 3^b}{7^b\cdot 11^c}$$

解析

易知，a,b,c 是三角形的三边长，当且仅当存在正数 x,y,z 满足
$a=\dfrac{x+y}{2},b=\dfrac{y+z}{2},c=\dfrac{z+x}{2}$。

故有 $x=c+a-b,y=a+b-c,z=b+c-a$，即 x,y,z 均为正整数且同奇偶。不妨
$x=2p-1,y=2q-1,z=2r-1$ 或 $x=2p,y=2q,z=2r$（$p,q,r\in\mathbb{N}_+$）。

则有:

$$
\begin{aligned}
\sum_{(a,b,c)\in S}\frac{2^a\cdot 3^b}{7^b\cdot 11^c} &= \sum_{p,q,r\in\mathbb{N}_+}\frac{2^{p+q-1}\cdot 3^{q+r-1}}{7^{q+r-1}\cdot 11^{r+p-1}}+\sum_{p,q,r\in\mathbb{N}_+}\frac{2^{p+q}\cdot 3^{q+r}}{7^{q+r}\cdot 11^{r+p}} \\
&= \left(\frac{2^{-1}\cdot 3^{-1}}{7^{-1}\cdot 11^{-1}}+1\right)\sum_{p,q,r\in\mathbb{N}_+}\frac{2^{p+q}\cdot 3^{q+r}}{7^{q+r}\cdot 11^{r+p}} \\
&= \frac{83}{6}\sum_{p,q,r\in\mathbb{N}_+}\frac{2^{p+q}\cdot 3^{q+r}}{7^{q+r}\cdot 11^{r+p}} \\
&= \frac{83}{6}\sum_{p,q,r\in\mathbb{N}_+}\left(\frac{2}{11}\right)^p\left(\frac{6}{7}\right)^q\left(\frac{3}{77}\right)^r \\
&= \frac{83}{6}\sum_{p\in\mathbb{N}_+}\left(\frac{2}{11}\right)^p\sum_{q\in\mathbb{N}_+}\left(\frac{6}{7}\right)^q\sum_{r\in\mathbb{N}_+}\left(\frac{3}{77}\right)^r \\
&= \frac{83}{6}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{6}{1}\cdot\frac{3}{74} \\
&= \frac{83}{111}
\end{aligned}
$$

by FRY。

No.015

题目

求下式的值：

$$
\sqrt{2^1\sqrt{2^4\sqrt{2^9\sqrt{2^{16}\sqrt{\ldots\sqrt{2^{n^2}\sqrt{\ldots}}}}}}}
$$

解析

记所求值为 S，则有：

$$
S=2^{\frac{1^2}{2^1}+\frac{2^2}{2^2}+\frac{3^2}{2^3}+\frac{4^2}{2^4}+\ldots+\frac{n^2}{2^n}+\ldots}
$$

记 $T=\log_2 S$，则有：

$$
T=\frac{1^2}{2^1}+\frac{2^2}{2^2}+\frac{3^2}{2^3}+\frac{4^2}{2^4}+\ldots+\frac{n^2}{2^n}+\ldots
$$

则：

$$
\frac{1}{2}T=\frac{1^2}{2^2}+\frac{2^2}{2^3}+\frac{3^2}{2^4}+\frac{4^2}{2^5}+\ldots+\frac{(n-1)^2}{2^n}+\ldots
$$

则：

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}T &= T - \frac{1}{2}T \\
&= \frac{1^2}{2^1} + \frac{2^2-1^2}{2^2} + \frac{3^2-2^2}{2^3} + \frac{4^2-3^2}{2^4} + \ldots + \frac{n^2-(n-1)^2}{2^n} + \ldots \\
&= \frac{1}{2^1} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \frac{7}{2^4} + \ldots + \frac{2n-1}{2^n} + \ldots
\end{aligned}
$$

则:

$$
\frac{1}{4}T = \frac{1}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{5}{2^4} + \frac{7}{2^5} + \ldots + \frac{2n-3}{2^n} + \ldots
$$

则:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{4}T &= \frac{1}{2}T - \frac{1}{4}T \\
&= \frac{1}{2^1} + \frac{3-1}{2^2} + \frac{5-3}{2^3} + \frac{7-5}{2^4} + \ldots + \frac{(2n-1)-(2n-3)}{2^n} + \ldots \\
&= \frac{1}{2^1} + \frac{2}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \frac{2}{2^4} + \ldots + \frac{2}{2^n} + \ldots \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots \\
&= \frac{1}{2} + 1 \\
&= \frac{3}{2}
\end{aligned}
$$

即 $T = 6$，则 $S = 2^T = 64$。

by CXY。

No.016

题目

给定函数 $f(x) = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{8}{x}$，若函数 $g(x) = f(x) - a$ （$a \in \mathbb{R}$）有三个零点，为 x_1, x_2, x_3 且 $x_1 < x_2 < x_3$，求 $\dfrac{{x_1}^3+1}{x_1} + \dfrac{{x_2}^3+1}{x_2}$ 的取值范围。

解析

由于 $y = \dfrac{x^2}{2}$ 和 $y = \dfrac{8}{x}$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减，故 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减。

对于 $x \in (0, +\infty), f(x) = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{4}{x} + \dfrac{4}{x} \geq 3\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{2} \cdot \dfrac{4}{x} \cdot \dfrac{4}{x}} = 6$，当且仅当 $x = 2$ 时取等。故 $f(x)$ 在 $(0, 2)$ 上单调递减，在 $(2, +\infty)$ 上单调递增。

因为 x_1, x_2 为 $g(x)$ 的零点，所以有 $f(x_1) = f(x_2) = a$，即:

$$
\frac{{x_1}^2}{2} + \frac{8}{x_1} - \frac{{x_2}^2}{2} - \frac{8}{x_2} = 0
$$

即：

$$(x_1-x_2)\left(\frac{x_1+x_2}{2}-\frac{8}{x_1x_2}\right)=0$$

因为有 $x_1-x_2\neq 0$，所以 $\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{8}{x_1x_2}$，即 $x_1+x_2=\frac{16}{x_1x_2}$。

当 $x_2=2$ 时，可以解得 $x_1=-4$，此时 $x_1+x_2=-2$，所以有 $x_1+x_2<-2$，故有 $-8<x_1x_2<0$。

因为有：

$$\begin{aligned}\frac{{x_1}^3+1}{x_1}+\frac{{x_2}^3+1}{x_2}&={x_1}^2+{x_2}^2+\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\\&=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2+\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}\\&=\left(\frac{16}{x_1x_2}\right)^2-2x_1x_2+\frac{16}{(x_1x_2)^2}\end{aligned}$$

令 $t=-x_1x_2$，则 $t\in(0,8)$，则有：

$$\begin{aligned}\left(\frac{16}{x_1x_2}\right)^2-2x_1x_2+\frac{16}{(x_1x_2)^2}&=\left(\frac{16}{-t}\right)^2+2t+\frac{16}{t^2}\\&=\frac{272}{t^2}+2t\\&\geq 3\sqrt[3]{\frac{272}{t^2}\cdot t\cdot t}\\&=6\sqrt[3]{34}\end{aligned}$$

当且仅当 $t=2\sqrt[3]{34}\in(0,8)$ 时取等。

当 t 趋近于 0 时，$\frac{272}{t^2}+2t$ 趋近于正无穷，故原式无上界。

故原式取值范围为 $[6\sqrt[3]{34},+\infty)$。

by LZW。

No.017

题目

设函数 $f(x)$ 满足对任意非零实数 x 均有 $f\left(\frac{1}{x}\right)=af(x)-2x-7$，且 $f(1)=1$。

求 $F(x)=f(x)$（$x\in\{x\mid x\neq 0,f(x)\geq 5x\}$）的值域。

解析

因为 $f(1)=1$，所以有 $1=a-2-7$，即 $a=10$。

联立下式：

$$\begin{cases} f\left(\dfrac{1}{x}\right) = 10f(x) - 2x - 7 \\ f(x) = 10f\left(\dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{2}{x} - 7 \end{cases}$$

可解得 $f(x) = \dfrac{20x}{99} + \dfrac{2}{99x} + \dfrac{7}{9}$。

则 $f(x) \geq 5x$ 即 $\dfrac{-475x}{99} + \dfrac{2}{99x} + \dfrac{7}{9} \geq 0$，即 $\dfrac{-475x^2 + 77x + 2}{99x} \geq 0$，即 $x\left(475x^2 - 77x - 2\right) \leq 0$。

因为 $475x^2 - 77x - 2$ 两根为 $\dfrac{77 \pm 3\sqrt{1081}}{950}$，则：

$$x\left(x - \frac{77 + 3\sqrt{1081}}{950}\right)\left(x - \frac{77 - 3\sqrt{1081}}{950}\right) \leq 0$$

解得 $x \in \left(-\infty, \dfrac{77 - 3\sqrt{1081}}{950}\right] \cup \left(0, \dfrac{77 + 3\sqrt{1081}}{950}\right]$，即 $F(x)$ 定义域为 $\left(-\infty, \dfrac{77 - 3\sqrt{1081}}{950}\right] \cup \left(0, \dfrac{77 + 3\sqrt{1081}}{950}\right]$。

当 $x > 0$ 时，由均值不等式可知 $f(x) \geq \dfrac{4\sqrt{10}}{99} + \dfrac{7}{9}$，当且仅当 $x = \dfrac{\sqrt{10}}{10}$ 时取等，而此时 $\dfrac{\sqrt{10}}{10} > \dfrac{77 + 3\sqrt{1081}}{950}$。故当 $x > 0$ 时 $F(x) \in \left[f\left(\dfrac{77 + 3\sqrt{1081}}{950}\right), +\infty\right) = \left[\dfrac{77 + 3\sqrt{1081}}{190}, +\infty\right)$。

而当 $x < 0$ 时，均值不等式可以取到等，故此时 $F(x) \in \left(-\infty, \dfrac{77 - 4\sqrt{10}}{99}\right]$。

综上，$F(x)$ 的值域为 $\left(-\infty, \dfrac{77 - 4\sqrt{10}}{99}\right] \cup \left[\dfrac{77 + 3\sqrt{1081}}{190}, +\infty\right)$。

by CXY。

No.018

题目

给定一个 $p \in (0,1)$，并按下述规则生成一个 x。

- 若 x 未被生成，则进行尝试，有 p 的概率成功，若成功则将 x 设为 1。
- 若 x 未被生成，则进行尝试，有 p 的概率成功，若成功则将 x 设为 3。
- 若 x 未被生成，则进行尝试，有 p 的概率成功，若成功则将 x 设为 5。

- 若 x 未被生成，则进行尝试，有 p 的概率成功，若成功则将 x 设为 7。
- ……

求 x 的期望值。

解析

由期望的定义可知，所求即为 $\sum_{i\in\mathbb{N}_+} p(1-p)^{i-1}(2i-1)$，记该值为 S。

则有：

$$(1-p)S=\sum_{i\in\mathbb{N}_+} p(1-p)^{i}(2i-1)$$

则：

$$pS=p+\sum_{i\in\mathbb{N}_+} 2p(1-p)^{i}$$

则：

$$S=1+2\sum_{i\in\mathbb{N}_+}(1-p)^{i}=\frac{2-p}{p}$$

by CXY。

No.019

题目

有一枚质地不均匀的四面体骰子，四面分别印有 $1,2,3,4$，记投掷完后朝下面的数字为该次投掷的结果。

现在连续投掷两次该骰子，掷到的数和为 7 的概率等于和为 6 的概率等于差的绝对值为 2 的概率等于和为 2 的概率的 16 倍（若两次掷到的数分别为 a,b，则题意即 $P(a+b=7)=P(a+b=6)=P(|a-b|=2)=16P(a+b=2)$）。

求一次投掷掷到 $1,2,3,4$ 的概率分别是多少。

解析

设一次投掷掷到 $1,2,3,4$ 的概率分别为 p_1,p_2,p_3,p_4，则由题意可以列出：

$$2p_3p_4=2p_2p_4+{p_3}^2=2p_1p_3+2p_2p_4=16{p_1}^2$$

且有 $p_1+p_2+p_3+p_4=1,p_i\in(0,1)$

解得 $p_1=\dfrac{2}{17},p_2=\dfrac{3}{17},p_3=\dfrac{4}{17},p_4=\dfrac{8}{17}$。

by CXY。

No.020

题目

若 $x,y>0$，求下式的最小值：

$$\frac{\sqrt{6}x+\sqrt{7x^2+5y^2}}{\sqrt{2}x+\sqrt{3}y}$$

解析

设 $\lambda\in[-1,1]$，则有

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{6}x+\sqrt{7x^2+5y^2}}{\sqrt{2}x+\sqrt{3}y}&=\frac{\sqrt{6}x+\sqrt{\left(\left(\sqrt{7}x\right)^2+\left(\sqrt{5}y\right)^2\right)\left(\lambda^2+\left(\sqrt{1-\lambda^2}\right)^2\right)}}{\sqrt{2}x+\sqrt{3}y}\\&\geq\frac{\sqrt{6}x+\sqrt{7}\lambda x+\sqrt{5}\sqrt{1-\lambda^2}y}{\sqrt{2}x+\sqrt{3}y}\\&=\frac{\left(\sqrt{6}+\sqrt{7}\lambda\right)x+\sqrt{5}\sqrt{1-\lambda^2}y}{\sqrt{2}x+\sqrt{3}y}\end{aligned}$$

为使该式与 x,y 无关，令：

$$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{7}\lambda}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{5}\sqrt{1-\lambda^2}}{\sqrt{3}}$$

即：

$$3\sqrt{2}+\sqrt{21}\lambda=\sqrt{10-10\lambda^2}$$

即：

$$21\lambda^2+6\sqrt{42}\lambda+18=10-10\lambda^2$$

即：

$$31\lambda^2+6\sqrt{42}\lambda+8=0$$

解得 $\lambda=\dfrac{-3\sqrt{42}+\sqrt{130}}{31}$（舍另一根）。

此时可得原式最小值即为 $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{7}\lambda}{\sqrt{2}}=\dfrac{10\sqrt{3}+\sqrt{455}}{31}$。

by CXY。