No.001

令 $f(x)=\min\left\{2+\log_{\frac{1}{k^2}}x,3\log_k x\right\}$ $(k\in(0,1)\cup(1,+\infty))$ ，求 $f_{\max}(x)$ 以及此时的 x。

其中 $\min\{x,y\}=\dfrac{x+y-|x-y|}{2}$，即 x,y 中的较小值。

by CXY。

No.002

令 $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}+b}{k}$，且 $f(x)$ 为奇函数，且 $f(1)=1$。

1. 求 b,k。
2. 求 $g(x)=\dfrac{f(x)}{\mathrm{e}^x}$ 的值域。
3. 直接写出 $h(x)=f(x)-\mathrm{e}x$ 的零点个数。

上述 e 均表示自然底数，约为 2.718282。

by CXY。

No.003

给定数列 $\{a_n\}$，满足 $a_1=1$ 且 $\forall n\in[2,+\infty)\cap\mathbb{N}_+,a_n=n+\log_n a_{n-1}$。

给定数列 $\{b_n\}$，满足 $\forall n\in\mathbb{N}_+,b_n=\lfloor a_n\rfloor$。

求 b_n 通项公式。

其中 $\lfloor x\rfloor$ 表示不超过 x 的最大整数。

by ZHX。

No.004

对于 $x,y\in\mathbb{R}$ 且 $x,y\neq 0$，满足：

$$\begin{cases}(x^3+2a)(2^x+1)=1-2^x\\(4y^3-a)(4^y+1)=\dfrac{1-4^y}{2}\end{cases}$$

其中 a 为保证 x,y 有解的常数。

求：

$$\frac{(3^x+1)(9^y-1)+(3^x-1)(9^y+1)+(3^x+1)(9^y+1)}{(3^x+1)(9^y+1)}$$

by TZ。

No.005

有 n 个正实数 $a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n$，满足：

$$a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2+\ldots+a_n{}^2=1$$

求证：

$$a_1+ka_2+k^2a_3+\ldots+k^{n-1}a_n\leq\sqrt{\frac{(k^n+1)\,(k^n-1)}{(k+1)(k-1)}}$$

其中 $k\in(0,1)\cup(1,+\infty)$。

by CXY。

No.006

设 a,b,c 均为正实数，且 $a+b+c>abc$。

求证下式中必有至少两式成立：

$$\begin{cases}\dfrac{9}{a}+\dfrac{6}{b}+\dfrac{5}{c}\geq\dfrac{19}{2}\\\dfrac{6}{a}+\dfrac{5}{b}+\dfrac{9}{c}\geq\dfrac{19}{2}\\\dfrac{5}{a}+\dfrac{9}{b}+\dfrac{6}{c}\geq\dfrac{19}{2}\end{cases}$$

by CXY。

No.007

对于正数 a,b,c 满足 $a^3+b^3+c^3=\dfrac{99}{8}$，求证：

$$a^7+\frac{1}{16}b^7+\frac{16}{81}c^7\geq\frac{99}{8}$$

by CXY。

No.008

对于实数 x,y 满足 $x,y>1$，且有：

$$x+3^y=54$$

求 $(3x)^{y+1}$ 的最大值，并指出此时 x 的值。

by CXY。

No.009

$\forall x, y \in \mathbb{R}$，求证：

$$4^{x}-4^{y} \leq \frac{\left(2^{x+2}-2^{y+1}-2^{y}\right)^{2}}{7}$$

by CXY。

No.010

对于正实数 x, y, z，求证：

$$\frac{2x+y+z}{\sqrt{y+z}}+\frac{x+2y+z}{\sqrt{z+x}}+\frac{x+y+2z}{\sqrt{x+y}} \geq 2\sqrt{6(x+y+z)}$$

by CXY。