

No.001

$$f(x) = \min \left\{ 2 - \frac{1}{2} \log_k x, 3 \log_k x \right\}.$$

- 若 $k \in (1, +\infty)$ 。

则 $2 - \frac{1}{2} \log_k x$ 单调递减, $3 \log_k x$ 单调递增。

则 $f(x)$ 取得最大值时一定有 $2 - \frac{1}{2} \log_k x = 3 \log_k x$, 记此时的 x 为 x_0 , 下证该结论。

- 对于 $\forall x < x_0$, 因为 $2 - \frac{1}{2} \log_k x$ 单调递减, $3 \log_k x$ 单调递增。

所以 $2 - \frac{1}{2} \log_k x > f(x_0)$, $3 \log_k x < f(x_0)$, 则 $f(x) = 3 \log_k x < f(x_0)$ 。

- 对于 $\forall x > x_0$, 同理可得 $f(x) = 2 - \frac{1}{2} \log_k x > f(x_0)$ 。

故 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 时取得最大值。

则移向得 $\frac{7}{2} \log_k x_0 = 2$, 即 $\log_k x_0 = \frac{4}{7}$ 。

此时 $f(x_0) = \frac{12}{7}$, $x_0 = k^{\frac{4}{7}}$ 。

- 若 $k \in (0, 1)$ 。

同理可得 $f(x_0) = \frac{12}{7}$, $x_0 = k^{\frac{4}{7}}$ 。

综上, $f_{\max}(x) = \frac{12}{7}$, 此时 $x = k^{\frac{4}{7}}$ 。

No.002

1. 因为 $f(x)$ 为奇函数, 且 $f(x)$ 定义域为 $\mathbb{R}$, 所以 $f(0) = \frac{b}{k} = 0$, 即 $b = 0$ 。

因为 $f(1) = \frac{e - \frac{1}{e}}{k} = 1$, 所以 $k = e - \frac{1}{e}$ 。

经检验, 此时符合题目条件, 故 $b = 0$, $k = e - \frac{1}{e}$ 。

$$2. g(x) = \frac{1 - e^{-2x}}{k} = \frac{1}{k} - \frac{e^{-2x}}{k}.$$

因为 e^{-2x} 值域为 $(0, +\infty)$, 故 $-\frac{e^{-2x}}{k}$ 值域为 $(-\infty, 0)$ 。

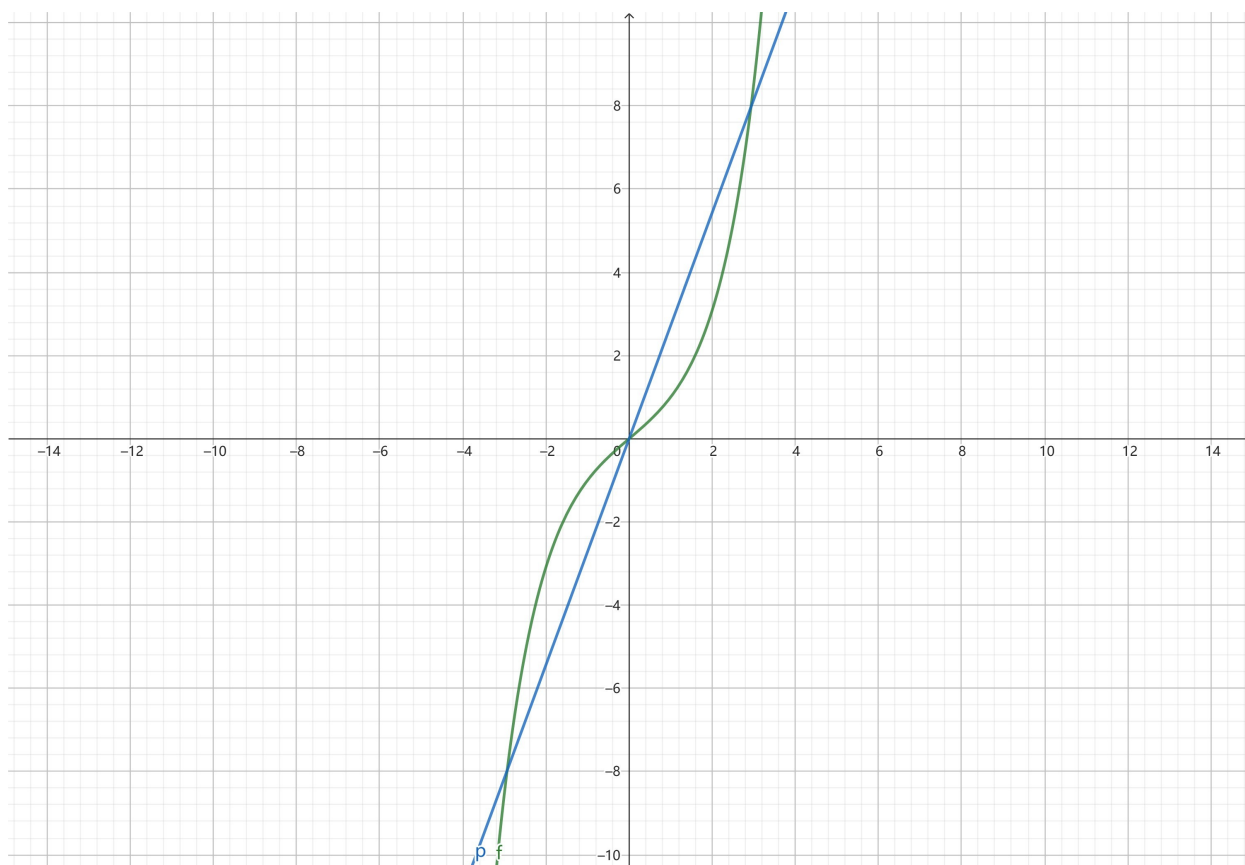
故 $g(x)$ 值域为 $\left(-\infty, \frac{1}{k}\right)$, 即 $\left(-\infty, \frac{e}{e^2 - 1}\right)$ 。

3. 共 3 个零点。

考虑 $h(x)$ 的零点个数即为 $f(x)$ 和 $p(x) = ex$ 图像的交点个数。

绘制图像可发现共有 3 个交点（严格证明需要运用导函数结合零点存在定理，这里给出这三个交点的横坐标近似值，可代入计算器验证： $-2.93367774, 0, 2.93367774$ ）。

下面是 $f(x)$ 和 $p(x)$ 的示意图：



No.003

经过试验可发现 $a_n \in [n, n+1)$, 下用数学归纳法证该结论。

- 当 $n = 1$ 时, $a_1 = 1 \in [1, 2)$ 成立。
- 若当 $n = k$ ($k \geq 1$) 时上述条件成立, 则 $a_k \in [k, k+1)$ 。

则 $\log_{k+1} a_k \in [\log_{k+1} k, \log_{k+1} (k+1))$ 。

因为 $k \geq 1$, 所以 $\log_{k+1} k \geq \log_{k+1} 1 = 0$ 。

所以 $\log_{k+1} a_k \in [0, 1)$ 。

所以 $a_{k+1} = k+1 + \log_{k+1} a_k \in [k+1, k+2)$ 。

即当 $n = k+1$ 时, 上述条件成立。

由数学归纳法可得 $a_n \in [n, n+1)$

故 $b_n = \lfloor a_n \rfloor = n$ 。

No.004

考虑对题目中的式子进行变形，得到：

$$\begin{cases} x^3 + 2a + \frac{2^x - 1}{2^x + 1} = 0 \\ 2 \left(4y^3 - a + \frac{4^y - 1}{2(4^y + 1)} \right) = 0 \end{cases}$$

即：

$$\begin{cases} x^3 + 2a + \frac{2^x - 1}{2^x + 1} = 0 \\ (2y)^3 - 2a + \frac{2^{2y} - 1}{2^{2y} + 1} = 0 \end{cases}$$

令 $f(t) = t^3 + \frac{2^t - 1}{2^t + 1}$ ，再得：

$$\begin{cases} f(x) + 2a = 0 \\ f(2y) - 2a = 0 \end{cases}$$

即：

$$f(x) = -f(2y)$$

不难发现 $f(t)$ 是一个奇函数，且是一个单射函数，所以有：

$$x = -2y$$

分析所求式子，裂项变形得到所求即：

$$\frac{3^x - 1}{3^x + 1} + \frac{3^{2y} - 1}{3^{2y} + 1} + 1$$

令 $g(t) = \frac{3^t - 1}{3^t + 1}$ ，则所求即：

$$g(x) + g(2y) + 1$$

不难发现 $g(t)$ 也为奇函数，所以有：

$$g(x) = -g(2y)$$

则所求即为 1。

No.005

由柯西不等式，易得：

$$(a_1 + ka_2 + k^2a_3 + \dots + k^{n-1}a_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2)(1 + k^2 + k^4 + \dots + k^{2n-2})$$

由题意和等比数列求和公式，易得：

$$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2)(1 + k^2 + k^4 + \dots + k^{2n-2}) = \frac{k^{2n} - 1}{k^2 - 1} = \frac{(k^n + 1)(k^n - 1)}{(k + 1)(k - 1)}$$

即：

$$(a_1 + ka_2 + k^2a_3 + \dots + k^{n-1}a_n)^2 \leq \frac{(k^n + 1)(k^n - 1)}{(k + 1)(k - 1)}$$

两边同时开根号，得：

$$a_1 + ka_2 + k^2a_3 + \dots + k^{n-1}a_n \leq \sqrt{\frac{(k^n + 1)(k^n - 1)}{(k + 1)(k - 1)}}$$

得证。

No.006

考虑反证法，假设有两式不成立，不妨为第一式和第二式，则有：

$$\begin{cases} \frac{9}{a} + \frac{6}{b} + \frac{5}{c} < \frac{19}{2} & (1) \\ \frac{6}{a} + \frac{5}{b} + \frac{9}{c} < \frac{19}{2} & (2) \\ \frac{5}{a} + \frac{9}{b} + \frac{6}{c} \geq \frac{19}{2} & (3) \end{cases}$$

由 $9 \times (1) + 2 \times (2) - 1 \times (3)$ 可得：

$$\frac{88}{a} + \frac{55}{b} + \frac{57}{c} < 95$$

则有：

$$\frac{55}{a} + \frac{55}{b} + \frac{55}{c} < \frac{88}{a} + \frac{55}{b} + \frac{57}{c} < 95$$

即：

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < \frac{19}{11}$$

而又因为：

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 &= \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{2}{ab} + \frac{2}{bc} + \frac{2}{ca} \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2} \right) + \frac{2}{ab} + \frac{2}{bc} + \frac{2}{ca} \\
&\geq \frac{1}{2} \left(\frac{2}{ab} + \frac{2}{bc} + \frac{2}{ca} \right) + \frac{2}{ab} + \frac{2}{bc} + \frac{2}{ca} \\
&= \frac{3}{ab} + \frac{3}{bc} + \frac{3}{ca} \\
&= \frac{3(a+b+c)}{abc} \\
&> 3
\end{aligned}$$

故：

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} > \sqrt{3}$$

与 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < \frac{19}{11}$ 矛盾。

故假设不成立，原命题成立。

No.007

引理：卡尔松不等式

在 $m \times n$ 的非负实数矩阵中， n 列每列元素之和的几何平均值不小于矩阵中 m 行每行元素的几何平均值之和。

符号语言即：

$$\prod_i^n \left(\sum_j^m x_{j,i} \right)^{\frac{1}{n}} \geq \sum_j^m \left(\prod_i^n x_{j,i} \right)^{\frac{1}{n}}$$

证明：

令 $A_i = \sum_j^m x_{j,i}$ ，由均值不等式可知：

$$\frac{1}{n} \sum_i^n \frac{x_{j,i}}{A_i} \geq \left(\prod_i^n \frac{x_{j,i}}{A_i} \right)^{\frac{1}{n}}$$

则：

$$\sum_j^m \left(\frac{1}{n} \sum_i^n \frac{x_{j,i}}{A_i} \right) \geq \sum_j^m \left(\prod_i^n \frac{x_{j,i}}{A_i} \right)^{\frac{1}{n}}$$

即：

$$1 \geq \sum_j^m \left(\prod_i^n \frac{x_{j,i}}{A_i} \right)^{\frac{1}{n}}$$

即：

$$\left(\prod_i^n A_i \right)^{\frac{1}{n}} \geq \sum_j^m \left(\prod_i^n x_{j,i} \right)^{\frac{1}{n}}$$

即：

$$\prod_i^n \left(\sum_j^m x_{j,i} \right)^{\frac{1}{n}} \geq \sum_j^m \left(\prod_i^n x_{j,i} \right)^{\frac{1}{n}}$$

得证。

题目即证：

$$a^7 + \frac{1}{16}b^7 + \frac{16}{81}c^7 \geq a^3 + b^3 + c^3$$

注意到形式可以用卡尔松不等式，于是可以列出矩阵：

$$\begin{pmatrix} a^7 & a^7 & a^7 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{16}b^7 & \frac{1}{16}b^7 & \frac{1}{16}b^7 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ \frac{16}{81}c^7 & \frac{16}{81}c^7 & \frac{16}{81}c^7 & \frac{27}{8} & \frac{27}{8} & \frac{27}{8} & \frac{27}{8} \end{pmatrix}$$

然后由卡尔松不等式可得：

$$\sqrt[7]{\left(1 + 8 + \frac{27}{8}\right)^4 \left(a^7 + \frac{1}{16}b^7 + \frac{16}{81}c^7\right)^3} \geq \sqrt[7]{a^{21}} + \sqrt[7]{b^{21}} + \sqrt[7]{c^{21}}$$

即：

$$\sqrt[7]{\left(\frac{99}{8}\right)^4 \left(a^7 + \frac{1}{16}b^7 + \frac{16}{81}c^7\right)^3} \geq a^3 + b^3 + c^3 = \frac{99}{8}$$

两边 7 次方，即可得：

$$\left(\frac{99}{8}\right)^4 \left(a^7 + \frac{1}{16}b^7 + \frac{16}{81}c^7\right)^3 \geq \left(\frac{99}{8}\right)^7$$

即：

$$\left(a^7 + \frac{1}{16}b^7 + \frac{16}{81}c^7\right)^3 \geq \left(\frac{99}{8}\right)^3$$

即：

$$a^7 + \frac{1}{16}b^7 + \frac{16}{81}c^7 \geq \frac{99}{8}$$

故得证。

No.008

令 $z = \log_3 x$, 则有:

$$3^y + 3^z = 54$$

所求即 $3^{(y+1)(z+1)}$ 。

则由均值不等式可得:

$$\begin{aligned} 3^y + 3^z &\geq 2 \cdot 3^{\frac{y+z}{2}} \\ &= 2 \cdot 3^{\frac{y+1+z+1}{2}-1} \\ &\geq 2 \cdot 3^{\sqrt{(y+1)(z+1)}-1} \end{aligned}$$

等号成立当且仅当 $y = z$, 此时 $x = 27$ 。

故有:

$$3^{\sqrt{(y+1)(z+1)}} \leq 81$$

即:

$$(y+1)(z+1) \leq (\log_3 81)^2 = 16$$

故:

$$3^{(y+1)(z+1)} \leq 3^{16}$$

综上, $(3x)^{y+1}$ 的最大值为 $3^{16} = 43046721$, 此时 $x = 27$ 。

No.009

引理: Aczel 不等式 (反向柯西不等式) 的二阶形式

$\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$, 有:

$$(a^2 - b^2)(c^2 - d^2) \leq (ac - bd)^2$$

证明:

将不等式两侧展开, 记左侧值为 L , 右侧值为 R , 则有:

$$L = a^2c^2 - a^2d^2 - b^2c^2 + b^2d^2, R = a^2c^2 - 2abcd + b^2d^2$$

则有:

$$R - L = a^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd = (ad - bc)^2 \geq 0$$

故 $L \leq R$, 原不等式成立。

将原不等式变形，则所证即为：

$$7(2^{2x} - 2^{2y}) \leq (4 \cdot 2^x - 3 \cdot 2^y)^2$$

注意到 $7 = 4^2 - 3^2$ ，则所证即：

$$(4^2 - 3^2)(2^{2x} - 2^{2y}) \leq (4 \cdot 2^x - 3 \cdot 2^y)^2$$

由 Aczel 不等式的二阶形式得证。

No.010

令 $\sigma = x + y + z$ ，则要证原不等式即证：

$$\frac{\sigma + x}{\sqrt{\sigma - x}} + \frac{\sigma + y}{\sqrt{\sigma - y}} + \frac{\sigma + z}{\sqrt{\sigma - z}} \geq 2\sqrt{6\sigma}$$

$$\text{令 } f(t) = \frac{\sigma + t}{\sqrt{\sigma - t}}.$$

则 $f''(t) = \frac{7\sigma - t}{4(\sigma - t)^{\frac{5}{2}}}$ ，当 $t \in (0, \sigma)$ 时 $f''(t) > 0$ ，即 $f(t)$ 为下凸函数（此步也可略去求导，使用凸函数的定义硬算也可得到相同结果，但较为繁琐）。

则由琴生不等式可得：

$$f(x) + f(y) + f(z) \geq 3f\left(\frac{x + y + z}{3}\right) = 3f\left(\frac{\sigma}{3}\right)$$

而展开 $3f\left(\frac{\sigma}{3}\right)$ 可得：

$$3f\left(\frac{\sigma}{3}\right) = \frac{4\sigma}{\sqrt{\frac{2}{3}\sigma}} = \sqrt{24\sigma} = 2\sqrt{6\sigma}$$

故代入 x, y, z 可得：

$$\frac{\sigma + x}{\sqrt{\sigma - x}} + \frac{\sigma + y}{\sqrt{\sigma - y}} + \frac{\sigma + z}{\sqrt{\sigma - z}} \geq 2\sqrt{6\sigma}$$

即原不等式成立，得证。