No.001

题目

令 $f(x)=\min\left\{2+\log_{\frac{1}{k^2}}x, 3\log_k x\right\}$ （$k\in(0,1)\cup(1,+\infty)$），求 $f_{\max}(x)$ 以及此时的 x。

其中 $\min\{x,y\}=\dfrac{x+y-|x-y|}{2}$，即 x,y 中的较小值。

解析

$f(x)=\min\left\{2-\dfrac{1}{2}\log_k x, 3\log_k x\right\}$。

- 若 $k\in(1,+\infty)$。

  则 $2-\dfrac{1}{2}\log_k x$ 单调递减，$3\log_k x$ 单调递增。

  则 $f(x)$ 取得最大值时一定有 $2-\dfrac{1}{2}\log_k x=3\log_k x$，记此时的 x 为 x_0，下证该结论。

  > - 对于 $\forall x<x_0$，因为 $2-\dfrac{1}{2}\log_k x$ 单调递减，$3\log_k x$ 单调递增。
  >
  >   所以 $2-\dfrac{1}{2}\log_k x>f(x_0), 3\log_k x<f(x_0)$，则 $f(x)=3\log_k x<f(x_0)$。
  > - 对于 $\forall x>x_0$，同理可得 $f(x)=2-\dfrac{1}{2}\log_k x>f(x_0)$。
  >
  > 故 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 时取得最大值。

  则移向得 $\dfrac{7}{2}\log_k x_0=2$，即 $\log_k x_0=\dfrac{4}{7}$。

  此时 $f(x_0)=\dfrac{12}{7}, x_0=k^{\frac{4}{7}}$。
- 若 $k\in(0,1)$。

  同理可得 $f(x_0)=\dfrac{12}{7}, x_0=k^{\frac{4}{7}}$。

综上，$f_{\max}(x)=\dfrac{12}{7}$，此时 $x=k^{\frac{4}{7}}$。

by CXY。

No.002

题目

令 $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}+b}{k}$，且 $f(x)$ 为奇函数，且 $f(1)=1$。

1. 求 b,k。
2. 求 $g(x)=\dfrac{f(x)}{\mathrm{e}^x}$ 的值域。
3. 直接写出 $h(x)=f(x)-\mathrm{e}x$ 的零点个数。

上述 e 均表示自然底数，约为 2.718282。

解析

1. 因为 $f(x)$ 为奇函数，且 $f(x)$ 定义域为 $\mathbb{R}$，所以 $f(0)=\dfrac{b}{k}=0$，即 $b=0$。

   因为 $f(1)=\dfrac{\mathrm{e}-\dfrac{1}{\mathrm{e}}}{k}=1$，所以 $k=\mathrm{e}-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$。

   经检验，此时符合题目条件，故 $b=0,k=\mathrm{e}-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$。
2. $g(x)=\dfrac{1-\mathrm{e}^{-2x}}{k}=\dfrac{1}{k}-\dfrac{\mathrm{e}^{-2x}}{k}$。

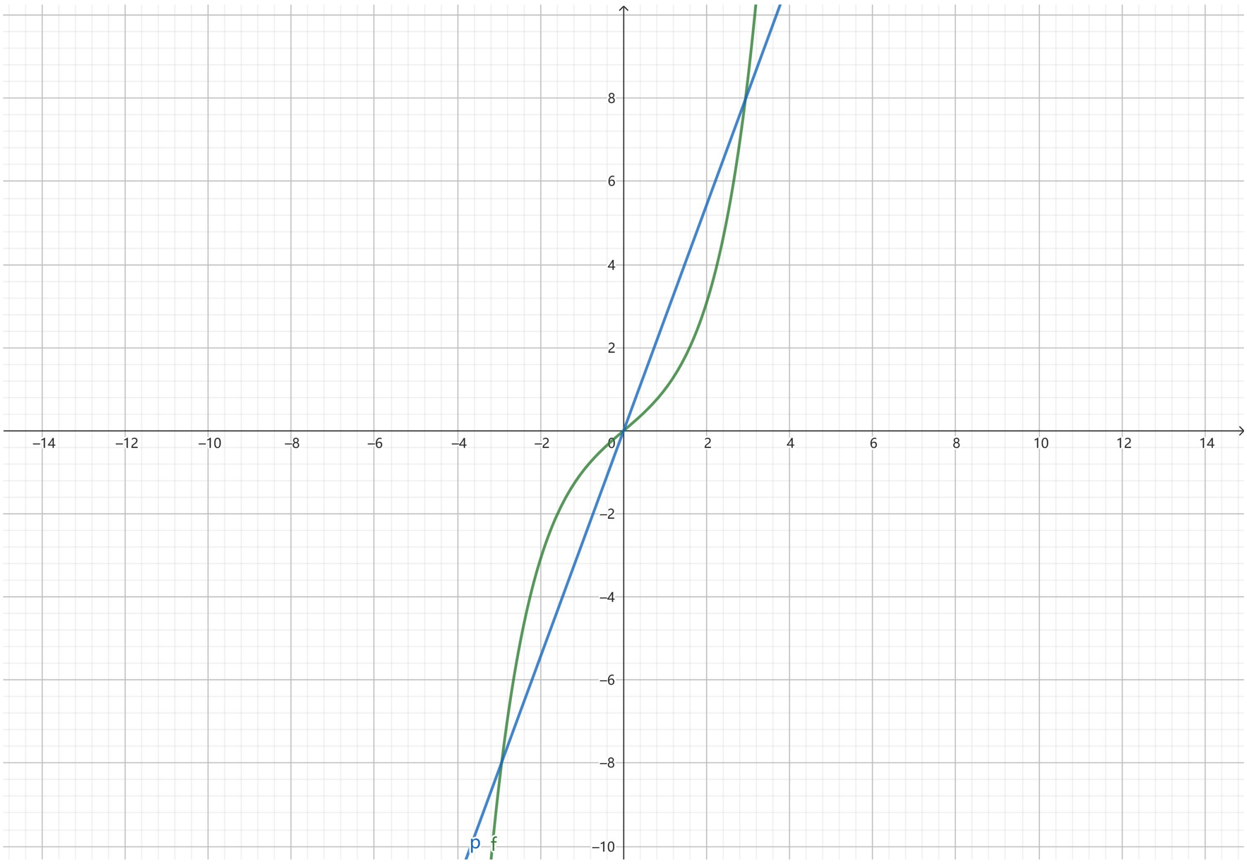
   因为 e^{-2x} 值域为 $(0,+\infty)$，故 $-\dfrac{\mathrm{e}^{-2x}}{k}$ 值域为 $(-\infty,0)$。

   故 $g(x)$ 值域为 $\left(-\infty,\dfrac{1}{k}\right)$，即 $\left(-\infty,\dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}^2-1}\right)$。
3. 共 3 个零点。

   考虑 $h(x)$ 的零点个数即为 $f(x)$ 和 $p(x)=\mathrm{e}x$ 图像的交点个数。

   绘制图像可发现共有 3 个交点（严格证明需要运用导函数结合零点存在定理，这里给出这三个交点的横坐标近似值，可代入计算器验证：$-2.93367774,0,2.93367774$）。

   下面是 $f(x)$ 和 $p(x)$ 的示意图：



by CXY。

No.003

题目

给定数列 $\{a_n\}$，满足 $a_1 = 1$ 且 $\forall n \in [2, +\infty) \cap \mathbb{N}_+, a_n = n + \log_n a_{n-1}$。

给定数列 $\{b_n\}$，满足 $\forall n \in \mathbb{N}_+, b_n = \lfloor a_n \rfloor$。

求 b_n 通项公式。

其中 $\lfloor x \rfloor$ 表示不超过 x 的最大整数。

解析

经过试验可发现 $a_n \in [n, n+1)$，下用数学归纳法证该结论。

> - 当 $n = 1$ 时，$a_1 = 1 \in [1, 2)$ 成立。
> - 若当 $n = k$（$k \geq 1$）时上述条件成立，则 $a_k \in [k, k+1)$。
>
>   则 $\log_{k+1} a_k \in [\log_{k+1} k, \log_{k+1} (k+1))$。
>
>   因为 $k \geq 1$，所以 $\log_{k+1} k \geq \log_{k+1} 1 = 0$。
>
>   所以 $\log_{k+1} a_k \in [0, 1)$。
>
>   所以 $a_{k+1} = k + 1 + \log_{k+1} a_k \in [k+1, k+2)$。

> 即当 $n=k+1$ 时，上述条件成立。
>
> 由数学归纳法可得 $a_n \in [n, n+1)$

故 $b_n = \lfloor a_n \rfloor = n$。

by ZHX。

No.004

题目

对于 $x, y \in \mathbb{R}$ 且 $x, y \neq 0$，满足：

$$\begin{cases} (x^3+2a)(2^x+1) = 1-2^x \\ (4y^3-a)(4^y+1) = \dfrac{1-4^y}{2} \end{cases}$$

其中 a 为保证 x, y 有解的常数。

求：

$$\frac{(3^x+1)(9^y-1)+(3^x-1)(9^y+1)+(3^x+1)(9^y+1)}{(3^x+1)(9^y+1)}$$

解析

考虑对题目中的式子进行变形，得到：

$$\begin{cases} x^3+2a+\dfrac{2^x-1}{2^x+1} = 0 \\ 2\left(4y^3-a+\dfrac{4^y-1}{2(4^y+1)}\right) = 0 \end{cases}$$

即：

$$\begin{cases} x^3+2a+\dfrac{2^x-1}{2^x+1} = 0 \\ (2y)^3-2a+\dfrac{2^{2y}-1}{2^{2y}+1} = 0 \end{cases}$$

令 $f(t) = t^3 + \dfrac{2^t-1}{2^t+1}$，再得：

$$\begin{cases} f(x)+2a = 0 \\ f(2y)-2a = 0 \end{cases}$$

即：

$$f(x) = -f(2y)$$

不难发现 $f(t)$ 是一个奇函数，且是一个单射函数，所以有：

$$x = -2y$$

分析所求式子，裂项变形得到所求即：

$$\frac{3^x-1}{3^x+1}+\frac{3^{2y}-1}{3^{2y}+1}+1$$

令 $g(t)=\dfrac{3^t-1}{3^t+1}$，则所求即：

$$g(x)+g(2y)+1$$

不难发现 $g(t)$ 也为奇函数，所以有：

$$g(x)=-g(2y)$$

则所求即为 1。

by TZ。

No.005

题目

有 n 个正实数 $a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n$，满足：

$$a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2+\ldots+a_n{}^2=1$$

求证：

$$a_1+ka_2+k^2a_3+\ldots+k^{n-1}a_n\leq\sqrt{\frac{\left(k^n+1\right)\left(k^n-1\right)}{(k+1)(k-1)}}$$

其中 $k\in(0,1)\cup(1,+\infty)$。

解析

由柯西不等式，易得：

$$\left(a_1+ka_2+k^2a_3+\ldots+k^{n-1}a_n\right)^2\leq\left(a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2+\ldots+a_n{}^2\right)\left(1+k^2+k^4+\ldots+k^{2n-2}\right)$$

由题意和等比数列求和公式，易得：

$$\left(a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2+\ldots+a_n{}^2\right)\left(1+k^2+k^4+\ldots+k^{2n-2}\right)=\frac{k^{2n}-1}{k^2-1}=\frac{\left(k^n+1\right)\left(k^n-1\right)}{(k+1)(k-1)}$$

即：

$$\left(a_1+ka_2+k^2a_3+\ldots+k^{n-1}a_n\right)^2\leq\frac{\left(k^n+1\right)\left(k^n-1\right)}{(k+1)(k-1)}$$

两边同时开根号，得：

$$a_1+ka_2+k^2a_3+\ldots+k^{n-1}a_n \le \sqrt{\frac{\left(k^n+1\right)\left(k^n-1\right)}{(k+1)(k-1)}}$$

得证。

by CXY。

No.006

题目

设 a,b,c 均为正实数，且 $a+b+c>abc$。

求证下式中必有至少两式成立：

$$\begin{cases}\dfrac{9}{a}+\dfrac{6}{b}+\dfrac{5}{c}\ge\dfrac{19}{2}\\\dfrac{6}{a}+\dfrac{5}{b}+\dfrac{9}{c}\ge\dfrac{19}{2}\\\dfrac{5}{a}+\dfrac{9}{b}+\dfrac{6}{c}\ge\dfrac{19}{2}\end{cases}$$

解析

考虑反证法，假设有两式不成立，不妨为第一式和第二式，则有：

$$\begin{cases}\dfrac{9}{a}+\dfrac{6}{b}+\dfrac{5}{c}<\dfrac{19}{2} & (1)\\\dfrac{6}{a}+\dfrac{5}{b}+\dfrac{9}{c}<\dfrac{19}{2} & (2)\\\dfrac{5}{a}+\dfrac{9}{b}+\dfrac{6}{c}\ge\dfrac{19}{2} & (3)\end{cases}$$

由 $9\times(1)+2\times(2)-1\times(3)$ 可得：

$$\frac{88}{a}+\frac{55}{b}+\frac{57}{c}<95$$

则有：

$$\frac{55}{a}+\frac{55}{b}+\frac{55}{c}<\frac{88}{a}+\frac{55}{b}+\frac{57}{c}<95$$

即：

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}<\frac{19}{11}$$

而又因为：

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2 &= \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{2}{ab}+\frac{2}{bc}+\frac{2}{ca} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}\right)+\frac{2}{ab}+\frac{2}{bc}+\frac{2}{ca} \\
&\geq \frac{1}{2}\left(\frac{2}{ab}+\frac{2}{bc}+\frac{2}{ca}\right)+\frac{2}{ab}+\frac{2}{bc}+\frac{2}{ca} \\
&= \frac{3}{ab}+\frac{3}{bc}+\frac{3}{ca} \\
&= \frac{3(a+b+c)}{abc} \\
&> 3
\end{aligned}
$$

故:

$$
\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} > \sqrt{3}
$$

与 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} < \frac{19}{11}$ 矛盾。

故假设不成立，原命题成立。

by CXY。

No.007

题目

对于正数 a,b,c 满足 $a^3+b^3+c^3=\frac{99}{8}$，求证:

$$
a^7+\frac{1}{16}b^7+\frac{16}{81}c^7 \geq \frac{99}{8}
$$

解析

> 引理：卡尔松不等式
>
> 在 $m\times n$ 的非负实数矩阵中，n 列每列元素之和的几何平均值不小于矩阵中 m 行每行元素的几何平均值之和。
>
> 符号语言即:
>
> $$
> \prod_i^n\left(\sum_j^m x_{j,i}\right)^{\frac{1}{n}} \geq \sum_j^m\left(\prod_i^n x_{j,i}\right)^{\frac{1}{n}}
> $$
>
> > 证明:
> >
> > 令 $A_i=\sum\limits_j^m x_{j,i}$，由均值不等式可知:

> $$\frac{1}{n}\sum_{i}^{n}\frac{x_{j,i}}{A_i}\geq\left(\prod_{i}^{n}\frac{x_{j,i}}{A_i}\right)^{\frac{1}{n}}$$
>
> 则:
>
> $$\sum_{j}^{m}\left(\frac{1}{n}\sum_{i}^{n}\frac{x_{j,i}}{A_i}\right)\geq\sum_{j}^{m}\left(\prod_{i}^{n}\frac{x_{j,i}}{A_i}\right)^{\frac{1}{n}}$$
>
> 即:
>
> $$1\geq\sum_{j}^{m}\left(\prod_{i}^{n}\frac{x_{j,i}}{A_i}\right)^{\frac{1}{n}}$$
>
> 即:
>
> $$\left(\prod_{i}^{n}A_i\right)^{\frac{1}{n}}\geq\sum_{j}^{m}\left(\prod_{i}^{n}x_{j,i}\right)^{\frac{1}{n}}$$
>
> 即:
>
> $$\prod_{i}^{n}\left(\sum_{j}^{m}x_{j,i}\right)^{\frac{1}{n}}\geq\sum_{j}^{m}\left(\prod_{i}^{n}x_{j,i}\right)^{\frac{1}{n}}$$
>
> 得证。

题目即证:

$$a^7+\frac{1}{16}b^7+\frac{16}{81}c^7\geq a^3+b^3+c^3$$

注意到形式可以用卡尔松不等式，于是可以列出矩阵:

$$\begin{pmatrix} a^7 & a^7 & a^7 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{16}b^7 & \frac{1}{16}b^7 & \frac{1}{16}b^7 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ \frac{16}{81}c^7 & \frac{16}{81}c^7 & \frac{16}{81}c^7 & \frac{27}{8} & \frac{27}{8} & \frac{27}{8} & \frac{27}{8} \end{pmatrix}$$

然后由卡尔松不等式可得:

$$\sqrt[7]{\left(1+8+\frac{27}{8}\right)^4\left(a^7+\frac{1}{16}b^7+\frac{16}{81}c^7\right)^3}\geq\sqrt[7]{a^{21}}+\sqrt[7]{b^{21}}+\sqrt[7]{c^{21}}$$

即:

$$\sqrt[7]{\left(\frac{99}{8}\right)^4\left(a^7+\frac{1}{16}b^7+\frac{16}{81}c^7\right)^3}\geq a^3+b^3+c^3=\frac{99}{8}$$

两边 7 次方，即可得:

$$\left(\frac{99}{8}\right)^4\left(a^7+\frac{1}{16}b^7+\frac{16}{81}c^7\right)^3\geq\left(\frac{99}{8}\right)^7$$

即：

$$\left(a^7+\frac{1}{16}b^7+\frac{16}{81}c^7\right)^3\geq\left(\frac{99}{8}\right)^3$$

即：

$$a^7+\frac{1}{16}b^7+\frac{16}{81}c^7\geq\frac{99}{8}$$

故得证。

by CXY。

No.008

题目

对于实数 x,y 满足 $x,y>1$，且有：

$$x+3^y=54$$

求 $(3x)^{y+1}$ 的最大值，并指出此时 x 的值。

解析

令 $z=\log_3 x$，则有：

$$3^y+3^z=54$$

所求即 $3^{(y+1)(z+1)}$。

则由均值不等式可得：

$$\begin{aligned}3^y+3^z&\geq 2\cdot 3^{\frac{y+z}{2}}\\&=2\cdot 3^{\frac{y+1+z+1}{2}-1}\\&\geq 2\cdot 3^{\sqrt{(y+1)(z+1)}-1}\end{aligned}$$

等号成立当且仅当 $y=z$，此时 $x=27$。

故有：

$$3^{\sqrt{(y+1)(z+1)}}\leq 81$$

即：

$$(y+1)(z+1)\leq(\log_3 81)^2=16$$

故：

$$3^{(y+1)(z+1)} \leq 3^{16}$$

综上，$(3x)^{y+1}$ 的最大值为 $3^{16}=43046721$，此时 $x=27$。

by CXY。

No.009

题目

$\forall x, y \in \mathbb{R}$，求证：

$$4^x-4^y \leq \frac{\left(2^{x+2}-2^{y+1}-2^y\right)^2}{7}$$

解析

> 引理：Aczel 不等式（反向柯西不等式）的二阶形式
>
> $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$，有：
>
> $$\left(a^2-b^2\right)\left(c^2-d^2\right) \leq (ac-bd)^2$$
>
> > 证明：
> >
> > 将不等式两侧展开，记左侧值为 L，右侧值为 R，则有：
> >
> > $$L=a^2c^2-a^2d^2-b^2c^2+b^2d^2, R=a^2c^2-2abcd+b^2d^2$$
> >
> > 则有：
> >
> > $$R-L=a^2d^2+b^2c^2-2abcd=(ad-bc)^2 \geq 0$$
> >
> > 故 $L \leq R$，原不等式成立。

将原不等式变形，则所证即为：

$$7\left(2^{2x}-2^{2y}\right) \leq \left(4 \cdot 2^x-3 \cdot 2^y\right)^2$$

注意到 $7=4^2-3^2$，则所证即：

$$\left(4^2-3^2\right)\left(2^{2x}-2^{2y}\right) \leq \left(4 \cdot 2^x-3 \cdot 2^y\right)^2$$

由 Aczel 不等式的二阶形式得证。

by CXY。

No.010

题目

对于正实数 x, y, z，求证：

$$\frac{2x+y+z}{\sqrt{y+z}}+\frac{x+2y+z}{\sqrt{z+x}}+\frac{x+y+2z}{\sqrt{x+y}} \geq 2\sqrt{6(x+y+z)}$$

解析

令 $\sigma=x+y+z$，则要证原不等式即证：

$$\frac{\sigma+x}{\sqrt{\sigma-x}}+\frac{\sigma+y}{\sqrt{\sigma-y}}+\frac{\sigma+z}{\sqrt{\sigma-z}} \geq 2\sqrt{6\sigma}$$

令 $f(t)=\dfrac{\sigma+t}{\sqrt{\sigma-t}}$。

则 $f''(t)=\dfrac{7\sigma-t}{4(\sigma-t)^{\frac{5}{2}}}$，当 $t \in (0,\sigma)$ 时 $f''(t)>0$，即 $f(t)$ 为下凸函数（此步也可略去求导，使用凸函数的定义硬算也可得到相同结果，但较为繁琐）。

则由琴生不等式可得：

$$f(x)+f(y)+f(z) \geq 3f\left(\frac{x+y+z}{3}\right)=3f\left(\frac{\sigma}{3}\right)$$

而展开 $3f\left(\dfrac{\sigma}{3}\right)$ 可得：

$$3f\left(\frac{\sigma}{3}\right)=\frac{4\sigma}{\sqrt{\dfrac{2}{3}\sigma}}=\sqrt{24\sigma}=2\sqrt{6\sigma}$$

故代入 x, y, z 可得：

$$\frac{\sigma+x}{\sqrt{\sigma-x}}+\frac{\sigma+y}{\sqrt{\sigma-y}}+\frac{\sigma+z}{\sqrt{\sigma-z}} \geq 2\sqrt{6\sigma}$$

即原不等式成立，得证。

by CXY。