每日一题汇总

题 1. 令 $f(x)=\min\left\{2+\log_{\frac{1}{k^2}}x, 3\log_k x\right\}$（$k\in(0,1)\cup(1,+\infty)$），求 $f_{\max}(x)$ 以及此时的 x。

题 2. 令 $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}+b}{k}$，且 $f(x)$ 为奇函数，且 $f(1)=1$。

1. 求 b,k。

2. 求 $g(x)=\dfrac{f(x)}{\mathrm{e}^x}$ 的值域。

3. 直接写出 $h(x)=f(x)-\mathrm{e}x$ 的零点个数。

题 3. 给定数列 $\{a_n\}$，满足 $a_1=1$ 且 $\forall n\in[2,+\infty)\cap\mathbb{N}_+, a_n=n+\log_n a_{n-1}$。

给定数列 $\{b_n\}$，满足 $\forall n\in\mathbb{N}_+, b_n=\lfloor a_n\rfloor$。

求 b_n 通项公式。

题 4. 对于 $x,y\in\mathbb{R}$ 且 $x,y\neq 0$，满足：

$$\begin{cases}(x^3+2a)(2^x+1)=1-2^x\\(4y^3-a)(4^y+1)=\dfrac{1-4^y}{2}\end{cases}$$

其中 a 为保证 x,y 有解的常数。

求：

$$\frac{(3^x+1)(9^y-1)+(3^x-1)(9^y+1)+(3^x+1)(9^y+1)}{(3^x+1)(9^y+1)}$$

题 5. 有 n 个正实数 $a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n$，满足：

$${a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2+\ldots+{a_n}^2=1$$

求证：

$$a_1+ka_2+k^2a_3+\ldots+k^{n-1}a_n\leq\sqrt{\frac{(k^n+1)(k^n-1)}{(k+1)(k-1)}}$$

其中 $k\in(0,1)\cup(1,+\infty)$。

题 6. 设 a,b,c 均为正实数，且 $a+b+c>abc$。

求证下式中必有至少两式成立：

$$\begin{cases}\dfrac{9}{a}+\dfrac{6}{b}+\dfrac{5}{c}\geq\dfrac{19}{2}\\\dfrac{6}{a}+\dfrac{5}{b}+\dfrac{9}{c}\geq\dfrac{19}{2}\\\dfrac{5}{a}+\dfrac{9}{b}+\dfrac{6}{c}\geq\dfrac{19}{2}\end{cases}$$

题 7. 对于正数 a,b,c 满足 $a^3+b^3+c^3=\dfrac{99}{8}$，求证：

$$a^7+\frac{1}{16}b^7+\frac{16}{81}c^7\geq\frac{99}{8}$$

题 8. 对于实数 x, y 满足 $x, y > 1$，且有：

$$x + 3^y = 54$$

求 $(3x)^{y+1}$ 的最大值，并指出此时 x 的值。

题 9. $\forall x, y \in \mathbb{R}$，求证：

$$4^x - 4^y \le \frac{\left(2^{x+2} - 2^{y+1} - 2^y\right)^2}{7}$$

题 10. 对于正实数 x, y, z，求证：

$$\frac{2x+y+z}{\sqrt{y+z}} + \frac{x+2y+z}{\sqrt{z+x}} + \frac{x+y+2z}{\sqrt{x+y}} \ge 2\sqrt{6(x+y+z)}$$

题 11. 已知函数 $f(x)$ 定义域为 $(0, 2)$ 且有：

$$f(x) = \begin{cases} |\ln 2x|, & 0 < x < 1 \\ \ln 2 + \ln(2-x), & 1 \le x < 2 \end{cases}$$

有三实数 a, b, c，满足 $0 < a < b < c < 2$ 且 $f(a) = f(b) = f(c)$，令：

$$m = \frac{1}{abc} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

求 m 的取值范围。

题 12. 两正实数 x, y 满足 $16x^2 - xy + y^2 = 1$，求 $4x + y$ 的最大值。
请至少用四种方法解决本题。

题 13. 设有一函数 $f(x)$ 定义域为 $[0, +\infty)$，且 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增。
且 $\forall x \in [0, +\infty), f\left(f(x) - \sqrt{3x}\right) = 3$。
若方程 $f(x+3) = x + k$ 有且仅有两不同实数根，求 k 的取值范围。

题 14. 设有一集合 $S = \{(a, b, c) \mid a, b, c \in \mathbb{N}_+$ 且 a, b, c 为某三角形的三边长 $\}$。
求：

$$\sum_{(a,b,c) \in S} \frac{2^a \cdot 3^b}{7^b \cdot 11^c}$$

题 15. 求下式的值：

$$\sqrt{2^1\sqrt{2^4\sqrt{2^9\sqrt{2^{16}\sqrt{\cdots\sqrt{2^{n^2}\sqrt{\cdots}}}}}}}$$

题 16. 给定函数 $f(x) = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{8}{x}$，若函数 $g(x) = f(x) - a$（$a \in \mathbb{R}$）有三个零点，为 x_1, x_2, x_3 且 $x_1 < x_2 < x_3$，求 $\dfrac{{x_1}^3 + 1}{x_1} + \dfrac{{x_2}^3 + 1}{x_2}$ 的取值范围。

题 17. 设函数 $f(x)$ 满足对任意非零实数 x 均有 $f\left(\frac{1}{x}\right)=af(x)-2x-7$，且 $f(1)=1$。

求 $F(x)=f(x)$（$x\in\{x\mid x\neq 0,f(x)\geq 5x\}$）的值域。

题 18. 给定一个 $p\in(0,1)$，并按下述规则生成一个 x。

1. 若 x 未被生成，则进行尝试，有 p 的概率成功，若成功则将 x 设为 1。
2. 若 x 未被生成，则进行尝试，有 p 的概率成功，若成功则将 x 设为 3。
3. 若 x 未被生成，则进行尝试，有 p 的概率成功，若成功则将 x 设为 5。
4. 若 x 未被生成，则进行尝试，有 p 的概率成功，若成功则将 x 设为 7。
5. ……

求 x 的期望值。

题 19. 有一枚质地不均匀的四面体骰子，四面分别印有 $1,2,3,4$，记投掷完后朝下面的数字为该次投掷的结果。

现在连续投掷两次该骰子，掷到的数和为 7 的概率等于和为 6 的概率等于差的绝对值为 2 的概率等于和为 2 的概率的 16 倍（若两次掷到的数分别为 a,b，则题意即 $P(a+b=7)=P(a+b=6)=P(|a-b|=2)=16P(a+b=2)$）。

求一次投掷掷到 $1,2,3,4$ 的概率分别是多少。

题 20. 若 $x,y>0$，求下式的最小值：

$$\frac{\sqrt{6}x+\sqrt{7x^2+5y^2}}{\sqrt{2}x+\sqrt{3}y}$$

题 21. 设函数 $f(x)=3^x+m(x-2)+n$ 在 $[2,4]$ 上存在零点，求 m^2+n^2 的最小值。

题 22. 设集合 $U=\{x\mid 1\leq x\leq 100,x\in\mathbb{N}_+\}$，函数 f 为满足定义域与值域均为 U 的随机函数，求 $f^{[30]}(1)=1$ 的概率。

题 23. 若 a,b,c 均为正实数且 $2b>3c,4c>5a$，求下式的最小值：

$$1458b^5+\frac{1}{a(2b-3c)(4c-5a)}$$

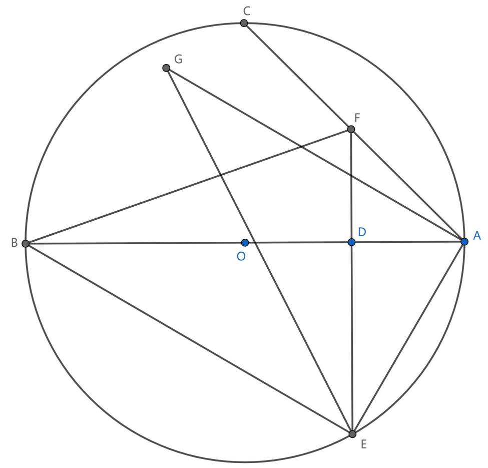
题 24. 这一次的英语考试变难了，原来的七选五现在变成了十选七，我们的英语学渣还是只会蒙题，不过他知道七个选项全都不同，所以他会随机的从合法的蒙法中选择一种来作为自己的答案，求他七道题全错的概率。

题 25. 你要选择一组 (a,b) 满足以下条件：

1. $a+b\leq\frac{\sqrt{2}}{2}$
2. $a-\sqrt{3}b\leq\sqrt{3}$
3. $b-a\leq 1$

不过你很懒，只会从 $\{(a,b)\mid a^2+b^2\leq 1\}$ 中随机选择一个 (a,b)，试问这样选出来的这组数满足上述条件的概率是多少。

题 26. 如图，AB 是 $\odot O$ 的直径，$\angle BAC=\frac{\pi}{4}$，D 是半径 OA 上的一动点，$DE\perp AB$ 交 $\odot O$ 于点 E，交 AC 于点 F，过 A 做 BE 的平行线 AG 且满足 $AG=BF$。求证：$S_{\triangle AEG}\geq S_{\triangle BDE}+S_{\triangle ADF}$。



题 27. 有 10 级台阶，每次会随机选择向上走 2 级台阶或向下走 1 级台阶（特别地，到达第 10 级台阶后不再走动，第 9 级台阶无法向上走，地面无法向下走），求期望多少步可以走到第 10 级台阶。

题 28. 求函数 $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$，使得 $f\left(x^5\right)-f\left(x^3\right)=1$。

题 29. 设正实数 a,b,c 满足 $a+b+c=\dfrac{4}{3}$，求证：

$$7(a+b)^2+7(b+c)^2+7(c+a)^2+9abc\geq\frac{1408}{81}$$

题 30. 甲乙轮流抛掷一枚质地均匀的硬币，若连续四次抛掷结果出现了”正正正反“则甲获胜，若出现了”正反反反“则乙获胜。求甲乙二人各自获胜的概率。

题 31. 求解函数方程：

$$f(x)+2f\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=x$$

题 32. 有一枚均匀的硬币（即抛出正反面的概率相同），反复抛该硬币直至连续四次抛掷出现“正反反正”局面，求期望抛多少次硬币。

题 33. 设正实数 a,b,c,d 满足 $a^2+b^2+c^2+d^2=4$，求下式的最小值：

$$\frac{a^3}{2}+\frac{b^3}{4}+\frac{c^3}{5}+\frac{d^3}{6}$$

题 34. 二次函数 $f(x)$ 满足：

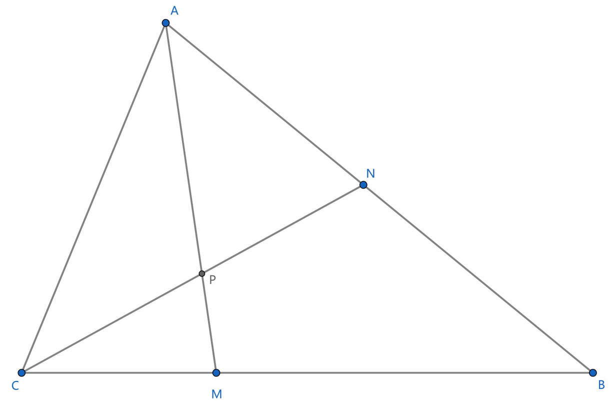
$$f(f(x))=-8x^4+40x^3-36x^2-35x$$

求 $\sqrt{f(x)}$ 的值域。

题 35. 若 (w,x,y,z) 为方程 $w+x+y+z=100$ 的正整数解，求其中 $w\leq x\leq y\leq z$ 的概率。

题 36. 对 3×2024 的方格图用红、绿、蓝三种颜色进行染色，每个格子都等概率的是三种颜色之一，求任意两个相邻格子颜色都不相同的概率（可用指数形式表示）。

题 37. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，N 为线段 AB 上一点，满足 $\overrightarrow{AN} = \alpha\overrightarrow{NB}$，$M$ 为 BC 上一点，满足 $\overrightarrow{CM} = 2\alpha^3\overrightarrow{MB}$，线段 CN 与线段 AM 交于点 P。求当 α 变化时，$\dfrac{AP}{PM}$ 的最小值。

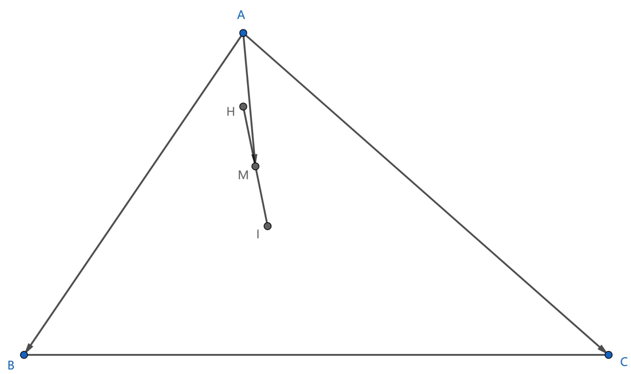


题 38. 若正整数 n 满足：将 $(x+1)^n$ 展开后按 x 的幂次从小到大排序，若存在连续三项的系数为等差数列，则称 n 是“好的”。若三位数 $n = \overline{abc}$（即 $n = 100a + 10b + c$）是“好的”，求使得 $a + 2b + 3c$ 最小的 n。

题 39. 若 a, b, c 是正实数，求下式的最小值：

$$\frac{a^3+2}{b+c} + \frac{b^3+2}{c+a} + \frac{c^3+2}{a+b}$$

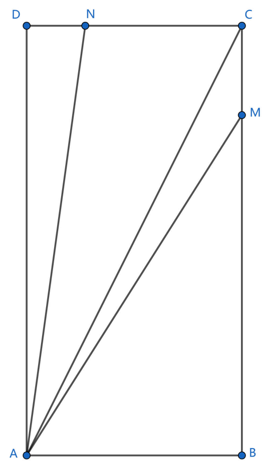
题 40. 如图所示，在 $\triangle ABC$ 中，$AB = 4, AC = 5, BC = 6$，I 为内心，H 为外心，M 为 IH 的中点，求 AM。



题 41. 若实数 $x, y, z \geq 0$ 满足 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$，求下式的最小值：

$$\frac{5-x}{5-2x}+\frac{5-y}{5-2y}+\frac{5-z}{5-2z}$$

题 42. 如图所示，在长方形 $ABCD$ 中，有 $AB=2,AD=4$，M,N 分别为 BC,DC 边上的两点，满足 $CM^2\cdot CN=1$。若有 $\overrightarrow{AC}=x\overrightarrow{AM}+y\overrightarrow{AN}$，求 $x+y$ 的最大值。



题 43. 平面向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}=2,\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{e}=-3$（其中 $\boldsymbol{e}$ 为单位向量，即 $|\boldsymbol{e}|=1$），且有 $|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2=50$，求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 的最大值。

题 44. 若 $\triangle ABC$ 三边长分别为 $BC=a,AC=b,BC=c$，G,H,I,O 分别为 $\triangle ABC$ 的重心、垂心、内心、外心。试用 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ 分别表示 $\overrightarrow{AG},\overrightarrow{AH},\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AO}$。

题 45. 有一些同学参加考试，考试共有 15 道选择题，每道题有 3 个选项，若任意 3 名学生中都有至少一题的答案互不相同，求至多有多少同学参加考试。

题 46. 求函数 $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$，使得：

$$f\left(xf(x)+y^2\right)=yf(y)+x^2$$

题 47. 设 H 是 $\triangle ABC$ 的垂心，且 $5\overrightarrow{HA}+7\overrightarrow{HB}+11\overrightarrow{HC}=\mathbf{0}$，求 $\cos\angle BHC$ 的值。

题 48. 已知 O 是 $\triangle ABC$ 的外心，且 $\overrightarrow{AO}=4\overrightarrow{AB}+11\overrightarrow{AC}$，求 $\dfrac{AB}{AC}$。

题 49. 一个袋子里有 4 个红球、5 个绿球、6 个篮球和 7 个白球，这些球除了颜色外没有区别，现在一个人从袋子里随机拿球，求对于每一个颜色，该颜色先被拿完的概率。

题 50. 在边长均为 1 的正 n 边形中，n 个顶点分别为 $A_1,A_2,\ldots,A_n$，P 为该 n 边形内一点（含边界），求 $\left|\sum\limits_{i=1}^{n}\overrightarrow{PA_i}\right|$ 的最大值。

题 51. 在 $\triangle ABC$ 中，$a=\sqrt{11},b-c=\sqrt{7}$，且 $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{5}$，求 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$。

题 52. 有一个 3×3 的网格，有一个人最开始位于左下角，他要向右上角走去。他每次走一步都会从上、下、左、右、左上、左下、右下七个方向中等概率的随机选择一个方向走（如果这个方向没有格子，那么

他一定不会选择这个方向，例如在左上角他只会从右、下、右下三个方向中随机选择一个方向)，且到达右上角后就停止不再走动，求他期望走多少步可以走到右上角。

题 53. 求 $\sin(x^2+x+1)+\cos(x-1)=0$ 的解集。

题 54. 在 $\triangle ABC$ 中，O 为 $\triangle ABC$ 的外心，且 $5\overrightarrow{OA}+6\overrightarrow{OB}+7\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$，求 $\cos A$。

题 55. 求函数 $f(x)=\sqrt{3+3\cos x}+\sqrt{1-\cos x}$ 的最大值和最小值。

题 56. 若 $\tan\theta=\dfrac{3}{7}$，求下式的值：

$$\frac{\cos^3\theta+\sin\theta}{\cos\theta-\sin\theta}-\frac{2}{\cos^4\theta-1}$$

题 57. 已知 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{2},|\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}$，且满足 $|\lambda\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|=2|2\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}|$（$\lambda\in\mathbb{R}_+$)，求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 的最大值。

题 58. 若 $f(x)=\dfrac{2x}{3x+5}$，求 $f^{[n]}(x)$。

题 59. $\triangle ABC$ 中，H 为垂心，且 $4\overrightarrow{HA}+5\overrightarrow{HB}+7\overrightarrow{HC}=\mathbf{0}$，求 $\sin A$ 的值。

题 60. 求函数 $f(x)=\ln(\sin x+\cos x+\sin x\cos x)$ 的定义域和值域。

题 61. 已知二次函数 $f(x)$ 满足 $f(f(x)-1)=-2f^2(x)+4f(x)-3$，求 $f(x)$。

题 62. 求 $f(x)=\tan(\pi\cos x)$ 的定义域和值域。

题 63. 已知 $\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)$，求下式的值：

$$\frac{\sin^2\left(\dfrac{3\pi}{2}-\theta\right)+\sin(3\pi+\theta)\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)}{\sin(5\pi-\theta)\cos(3\pi+\theta)+\cos^2(\pi+\theta)}$$

题 64. 已知 $2\sin\theta+5\cos\theta=3$，求 $\dfrac{\sin\theta+2\cos\theta}{2\sin\theta-\cos\theta}$ 的值。

题 65. 已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=6$ 且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，向量 $\boldsymbol{c}$ 满足 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}|=2$，求 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}|+3|2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}|$ 的最小值。

题 66. 已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 满足 $\dfrac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|}=\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{c}|}=2$，且 $(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=3(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})$，求 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 夹角的余弦值 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}\rangle$。

题 67. 在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC=4,BC=5$，D 是线段 BC 上一点且 $DC=2$。若平面上一点 P 满足 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AD}+\mu\overrightarrow{BC}$（$\lambda,\mu\geq 0$)，且 $3\lambda+5\mu=6$，求点 P 到直线 AB 距离的取值范围。

题 68. 在 $\triangle ABC$ 中，$AB=\sqrt{6},AC=\sqrt{3},\angle BAC=\dfrac{5\pi}{12}$，点 P 是 $\triangle ABC$ 所在平面内一点，求 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}$ 的最小值。

题 69. 已知 $\sin\alpha+\sin\beta=\dfrac{5\sqrt{5}}{26},\cos\alpha+\cos\beta=\dfrac{12\sqrt{5}}{26}$，求 $\tan\alpha+\tan\beta$ 的值。

题 70. 集合 $A=\{1,2,\ldots,200\}$，若集合 S 是 A 的子集且满足 $|S|=4$，求 S 中元素从小到大排列后成等比数列的概率。